Istituzioni di Matematica
17 Settembre 2008
Correzione

Esercizio 1. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $x^3+\sqrt{x+1}=0$ e trovare un intervallo di ampiezza minore di $1/10$ che contenga una delle soluzioni.

Soluzione. Sia $f(x)=x^3+\sqrt{x+1}=0$. f e' definita e continua per $x\geq -1$ e si ha $f(-1)=-1, f(0)=1$. Quindi certamente fra -1 e 0 c'e' almeno una soluzione dell'equazione data. Poiche' inoltre $f'(x)=3x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}>0$ se $x>-1$ la funzione e' sempre strettamente crescente e quindi non ci sono altre soluzioni.

Usando il metodo di bisezione, poiche' valgono le seguenti:
$f(-1/2)>0,\ f(-3/4)>0,\ f(-7/8)<0,\ f(-13/16)<0,$
otteniamo che la soluzione $\alpha\in(-13/16,-3/4)$ (che e' un intervallo di ampiezza 1/16).

Esercizio 2. Data la funzione $f(x)=2\cos x+\operatorname{sen} 2x$
a) Determinare il dominio di definizione e il periodo di *f,*
b) Trovare le coordinate di eventuali massimi e minimi locali e assoluti.
c) Determinare su quali intervalli la funzione e' concava e su quali convessa, e le coordinate dei punti di flesso,
d) Disegnare il grafico di *f.*

Soluzione. a) Il dominio e' $\mathbb{R}$ e la funzione e' periodica di periodo 2π . Bastera' quindi studiare il comportamento per $x\in[0,2\pi]$.

b) $f'(x)=-2\operatorname{sen} x+2\cos 2x=-2(2\operatorname{sen} x-1)(\operatorname{sen} x+1)$ quindi la derivata si annulla per $x=\dfrac{\pi}{6},\ x=\dfrac{5\pi}{6},\ x=\dfrac{3\pi}{2}$. La funzione e' crescente per

$x\in[0,\dfrac{\pi}{6}]$ e $x\in[\dfrac{5\pi}{6,}2\pi]$ e decrescente $x\in[\dfrac{\pi}{6,}\dfrac{5\pi}{6}]$ da cui si ha che

$f(\dfrac{\pi}{6})=3\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e' un massimo locale e $f(\dfrac{5\pi}{6})=-3\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e' un minimo locale

mentre in $x=\dfrac{3\pi}{2}$ esiste solo tangente orizzontale.

c) $f''(x)=-2\cos x(1+4\operatorname{sen} x)$, cosi' $f''(x)=0$ per $x=\dfrac{\pi}{2},\ x=\dfrac{3\pi}{2}$ e per due valori α_1 e α_2 dove $\operatorname{sen} x=-\dfrac{1}{4}$.

Quindi la funzione e' convessa per $x \in [\frac{\pi}{2,} \alpha_1]$ e $x \in [\frac{3\pi}{2,} \alpha_2]$ e concava per $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x \in [\alpha_{1,} \frac{3\pi}{2}]$ e $x \in [\alpha_{2,} 2\pi]$

Esercizio 3. Calcolare l'integrale $\int \log(\frac{1}{x}-1)\,dx$. .

Soluzione. Operando per parti con $\log(\frac{1-x}{x})$ come fattore finito si ottiene:

$$\int \log(\frac{1}{x}-1)\,dx = x\log(\frac{1}{x}-1) - \int \frac{1}{(x-1)}\,dx = x\log(\frac{1}{x}-1) - \log|x-1| + k .$$

Esercizio 4. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} (1-k)x+(k-3)y+1=0 \\ (4-k)y-z=0 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$$

ha soluzioni e interpretare geometricamente il risultato.

Soluzione. Il determinante della matrice ei coefficienti del sistema e' $(k-3)(k-4)$. Quindi per valori di k diversi da 3 e 4 il sistema ha una sola soluzione che corrisponde ad un punto di $\mathbb{R}^3$, determinato dall'intersezione di tre piani. Se $k=3$ si verifica facilmente che il rango della matrice completa e' 3, quindi il sistema non ha soluzione. Per $k=4$ il rango della matrice completa e' ancora 2 quindi esiste una infinita' di soluzioni che descrivono una retta in $\mathbb{R}^3$, di equazione $X=(0,-1,0)+t(1,3,0)$.

Esercizio 5. Esprimere in forma algebrica le radici dell'equazione

$$z^4+(1-i)z^2-i=0 \quad \cdot$$

Soluzione. Si ha $z^4+(1-i)z^2-i = z^2(z^2+1)-i(z^2+1) = (z^2-i)(z^2+1)=0$ da cui segue immediatamente che le soluzioni sono le suoluzioni di $z^2=i$ e $z^2=-1$ quindi $z_{1,2}=\pm(\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2)$ e $z_{3,4}=\pm i$.