Istituzioni di Matematica
CIA
30 Aprile 2009

Esercizio 1. Determinare massimi, minimi della funzione $f(x)=\sqrt{|2-x|}$ relativamente all'intervallo [1,3]. La funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle? (Giustificare le risposte).

Soluzione. La funzione e' definita e continua in [1,3].
Derivando la funzione si ottiene $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{|2-x|}}\frac{|2-x|}{2-x}$ da cui si ricava che la funzione non e' derivabile per $x=2$, dove pero' la funzione (valendo 0) ha un punto di minimo assoluto. Tale punto e' l' unico punto di minimo. Ci sono due punti di massimo agli estremi dove la funzione vale 1.
La funzione e' continua in [1,3] ma non e' derivabile in (1,3), quindi anche se $f(1)=f(3)=1$ non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.

Esercizio 2. Calcolare il valore medio della funzione $f(x)=sen(\log(x))$ nell'intervallo [$e^{-\pi/4}, e^{\pi/4}$].

Soluzione. La funzione e' continua in [$e^{-\pi/4}, e^{\pi/4}$] quindi il valore medio e' dato da $v_m(f)=\frac{1}{e^{\pi/4}-e^{-\pi/4}}\int_{e^{-\pi/4}}^{e^{\pi/4}} f(x)\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2(e^{\pi/2}-1)}$.

Esercizio 3. Tovare le radici complesse dell'equazione

$$(z^4+6iz^2-36)(z^3|z|+\bar{z}|z|)=0$$

Soluzione. Ponendo $u=z^2$ e risolvendo si ottengono le due equazioni $z^2=6(\cos(-\pi/6)+i\,sen(-\pi/6))$ e $z^2=6(\cos(5/6\pi)+i\,sen(5/6\pi))$,
da cui il primo fattore dell'equazione data ha soluzioni:

$$z_1=\sqrt{6}(\cos(23/12\pi)+i\,sen(23/12\pi)),$$
$$z_2=\sqrt{6}(\cos(11/12\pi)+i\,sen(11/12\pi))$$
$$z_3=\sqrt{6}(\cos(5/12\pi)+i\,sen(5/12\pi))$$
$$z_4=\sqrt{6}(\cos(17/12\pi)+i\,sen(17/12\pi)) .$$

Il secondo fattore ha soluzioni $z=0$ e $z=\frac{\pm\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esercizio 4. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -a/2 \end{pmatrix}$

e' invertibile? Scelto uno di tali valori calcolare l'inversa.

Soluzione. Il determinante della matrice e' $3a^2+8a-3=(a+3)(3a-1)$. Quindi la matrice e' invertibile per $a \neq -3$ e $a \neq \frac{1}{3}$. Per $a=1$ l'invecrsa e' data da $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 12 & -4 & 8 \\ 11 & -5 & 2 \\ -18 & 14 & -12 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5. Provare che la funzione $F(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^3}\,dt$ e' invertibile sul suo dominio di definizione e calcolare $(F^{-1})'(0)$.

Soluzione. La funzione $\sqrt{1+x^3}$ e' continua per $x \geq -1$ quindi $F(x)$ che e' una sua primitiva e' derivabile per $x \geq -1$. Poiche' $F'(x)=f(x) \geq 0$ la funzione $F(x)$ e'' continua e monotona e quindi invertibile. Si ha $F(1)=0$ $F'(1)=\sqrt{2} \neq 0$ quindi F^{-1} e' derivabile per $x=0$ e si ha

$$(F^{-1})'(0)=\frac{1}{F'(F(1))}=\frac{1}{\sqrt{2}} .$$