Istituzioni di Matematica
CIA
3 Giugno 2009
Correzione

Esercizio 1. Determinare gli eventuali asintoti e punti di massimo e minimo, relativi e assoluti, della funzione $f(x)=\dfrac{\log^3(x)}{x^2}$.

Soluzione. La funzione e' definita per ogni $x>0$.
Si ha che $lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ quindi la retta *x=0* e' un asintoto verticale.
Inoltre

$$lim_{x\to+\infty} f(x)=lim_{x\to+\infty}\frac{3\log^2(x)\frac{1}{x}}{2\text{x}}=\frac{3}{2}lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log(x)}{x}\right)^2=0$$

quindi il semiasse positivo delle ascisse e' un asintoto orizzontale.

$f'(x)=\dfrac{\log^2(x)(3-2\log(x))}{x^3}$ che si annulla per $x=1$ e per $x=e\sqrt{e}$

Dato che $f'(x)>0$ per $0<x<e\sqrt{e}$ il punto $x=e\sqrt{e}$ e' un punto di massimo assoluto e si ha $f(e\sqrt{e})=\dfrac{27}{8}e^{-3}$. Nel punto $x=1$ si ha un flesso orizzontale crescente.

Esercizio 2. Data la funzione $f(x)=e^{\frac{1}{\log(x)}}$

a) determinarne il dominio di definizione
b) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di *f* nel punto di ascissa *x=e*
c) Provare che *f* e' invertibile su $(1,+\infty)$
d) detta *g(y)* la funzione inversa di *f* scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto di ascissa *y = e*

Soluzione.
a) La funzione e' definita per $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$,

b), Dato che $f'(x)=\dfrac{-e^{\frac{1}{\log(x)}}}{xlog^2x}$ l'equazione della retta tangente cercata e'

$y=f(e)+f'(e)(x-e)=x+2e$.

c) su $(1,+\infty)$ si ha $f'(x)=\dfrac{-e^{\frac{1}{\log(x)}}}{x\log^2 x}<0$, cosi' la funzione e' (continua e) strettamente monotona decrescente quindi invertibile.

d) dato che f e' continua e $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ la funzione inversa $g(y)$ e' definita su $f(1,+\infty)=(1,+\infty)$, quindi $y=e$ appartiene al dominio di g e si ha $f(e)=e$. Abbiamo gia' calcolato $f'(e)=-1\neq 0$, quindi la retta tangente al grafico di g e' data da :

$$y=g(e)+g'(e)(x-e)=g(e)+\frac{1}{(f^{-1})'(e)}(x-e)=-x+2\mathrm{e} \ .$$

Esercizio 3. Sia $a\in\mathbb{R}$ e sia S_a l'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} ax-(a+2)y+z=-1 \\ (3+a)y-z=0 \\ 3\mathrm{x}-y+z=1 \end{cases}$$

Determinare per quali valori di $a\in\mathbb{R}$:

a) S_a e' un punto di $\mathbb{R}^3$

b) S_a e' vuoto

c) S_a e' una retta in $\mathbb{R}^3$.

Soluzione.

a) Il determinante della matrice dei coefficienti del sistema dato e' $(a-1)(a+3)$, quindi se $a\neq 1 \wedge a\neq -3$ il sistema ha una sola soluzione ossia S_a e' un punto di $\mathbb{R}^3$ **.**

b) Per $a=1$ il rango della matrice completa del sistema e' 3, quindi il sistema non ha soluzioni e S_a e' vuoto.

c) Per $a=-3$ il rango della matrice dei coefficienti e quello della matrice completa del sistema sono entrambi 2, quindi il sistema ha soluzioni date da $X=(\frac{1+t}{3},t,0)$ e cosi'

S_a ={ $X\in\mathbb{R}^3; X=(\frac{1}{3,}0{,}0)+t(1{,}3{,}0), t\in\mathbb{R}$ } e' la retta passante per il punto $P=(\frac{1}{3},0,0)$ e parallela al vettore $Q=(1,3,0)$.

Esercizio 4. Calcolare l'integrale improprio $\int_0^1 x\, sen(\log(x))\, dx$

Soluzione. Una primitiva della funzione integranda e' data da:

$$F(x)=\frac{x^2(2\, sen(\log x)-\cos(\log x))}{5}$$

Si ha $lim_{x\to 0} F(x)=0$ e $F(1)=\frac{-1}{5}$ quindi

$$\int_0^1 x\, sen(\log(x))\, dx=\frac{-1}{5} \quad .$$

Esercizio 5. Trovare tutte le radici complesse del polinomio

$$p(x)=x^{10}+15x^5-16 \in \mathbb{R}[x] \quad .$$

Soluzione. Il polinomio avra' esattamente 10 radici complesse.
Sostituiamo $z=x^5$ .Risolvendo $z^2+15z-16=0$ si trovano due radici $z_1=1 \; e \; z_2=-16$.

Quindi cinque radici sono date dalle radici quinte dell'unita'

$$x_{1,2,3,4,5}=\cos(\frac{2k\pi}{5}+i\, sen\frac{2k\pi}{5}),\, k=0,..4 \quad ,$$

ottenute risolvendol'equazione $x^5=1=(\cos 0+i\, sen 0)$.

Le altre cinque radici sono date dalle radici quinte di -16

$$x_{6,7,8,9,10}=2^{4/5}(\cos(\frac{(2k+1)\pi}{5}+i\, sen\frac{(2k+1)\pi}{5})),\, k=0,..4 \quad ,$$

ottenute risolvendol'equazione $x^5=-16=16(\cos\pi+i\, sen\pi)$.