Istituzioni di Matematica I
18 Febbraio 2011

Esercizio 1. Calcolare il valor medio della funzione $f=\cos(\log(x^2))$ sull'intervallo $[1,\sqrt{e}]$.

Soluzione. La funzione e' continua su $[1,\sqrt{e}]$ e il valore medio e dato da $v_m(f)=\frac{1}{\sqrt{e}-1}\int_1^{\sqrt{e}}\cos(\log(x^2))\,dx$.
Effettuando la sostituzione $t=\log x$ si ottiene

$\int\cos(2t)e^t\,dt=\frac{1}{5}e^t(2\sin(2t)+\cos(2t))+c$ da cui

$$v_m(f)=\frac{1}{\sqrt{e}-1}\int_0^{1/2}\cos(2t)e^t\,dt=\frac{1}{5(\sqrt{e}-1)}[\sqrt{e}(2\sin(1)+\cos(1))-1]$$

Esercizio 2. Data la funzione $f(x)=5-\cos(3x)$

a. Determinarne ampiezza e periodo
b. Disegnare il grafico di f .
c. Se $g(x)=5-\cos(3\mathrm{x}+3)$ che relazione c'e' fra i grafici di f e g ?
d. Disegnare il grafico di g .

Soluzione . L'ampiezza e' 1 e il periodo $\frac{2}{3}\pi$ **.**

$f(0)=f(\frac{2}{3}\pi)=4$ $f(\frac{\pi}{6})=5$ **e** $f(\frac{\pi}{3})=6$ **.** La funzione g ha lo stesso periodo e la stessa ampiezza di f ma e' shiftata a sinistra di 1, infatti

$g(-1)=g(\frac{2}{3}\pi-1)=4$

$g(\frac{\pi}{6}-1)=5$ e $g(\frac{\pi}{3}-1)=6$.

Esercizio 3.

i) Provare che esistono due valori di $a\in\mathbb{R}$ tali che i piani $\pi_1:3x+2z=0,\ \pi_2:4x-6y-az=0,\ \pi_3:x+2ay+z=0$ si intersecano in una retta e determinare le equazioni di tali rette.

ii) La retta di equazione $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+6t \\ z=1-t \end{cases}$ e' perpendicolare a una delle due rette

ottenute in i) ?

Soluzione. Bisogna vedere per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sistema $\begin{cases} 3x+2z=0 \\ 4x-6y-az=0 \\ x+2ay+z=0 \end{cases}$ ha una infinita' di soluzioni. Calcolando il determinante della

matrice associata al sistema si ottiene che il determinante si annulla per $a=-3 \; e \; a=\frac{1}{3}$. Sostituendo questi valori nel sistema e risolvendo si ottengono

le rette $X_3=t(-\frac{2}{3},\frac{1}{18,}1)$ e $X_{1/3}=t(\frac{2}{3},-\frac{1}{2},1)$. Dato che si ha

$(-\frac{2}{3},\frac{1}{18,}1)(1,6,-1)=-\frac{4}{3}\neq 0$ e $(\frac{2}{3},-\frac{1}{2},1)(1,6,-1)=-\frac{10}{3}\neq 0$
nessuna delle due rette e' perpendicolare alla retta data.

Esercizio 4. Risolvere a scelta uno dei seguenti esercizi:

i) Esprimere in forma trigonometrica le radici dell'equazione:

$$z^2-2z+1-i=0$$

Soluzione. Dato che $z=1\pm\sqrt{i}$ e $\sqrt{i}=\cos(\frac{\pi}{4}+k\pi), k=0{,}1$ si ha che le

soluzioni sono $z_1=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z_2=(1-\frac{\sqrt{2}}{2})-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$r=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ e $tg\, t=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

ii) Calcolare autovalori e autovettori della matrice : $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soluzione. Gli autovalori sono $t_1=0, t_2=1, t=2$ **.** I relativi autovettori sono

$v_0=(-1,0,1), v_1=(0,1,0), v_2=(1,0,1)$

Esercizio 5. Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} 4\sqrt{x^3}\, yy'+y^2-1=0 \\ y(1)=-2 \end{cases}$

Soluzione. Dato che $y=\pm 1$ non e' soluzione , riscrivendo l'equazione come $\frac{4yy'}{1-y^2}=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ e integrando si ottiene $y(x)=\pm\sqrt{1+c\, e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $c=\frac{3}{e}$.