Istituzioni di Matematica I - Integrazione
Traccia delle soluzioni
13 Settembre 2011

Esercizio 1. Data la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **,** calcolarne autovalori e autovettori . La matrice e' diagonalizzabile?

Soluzione. Gli autovalori della matrice sono 0 (con molteplicita' 2) e 1 .
Gli autovettori relativi all'autovalori 0 sono della forma $v_t=t(-1,10,9)$ mentre quelli relativi all'autovalore 1 sono $w_t=t(0,1,1)$ (per $t\in\mathbb{R}$).
Dato che $rango(A)=2$ la matrice non e' diagonalizzabile.

Esercizio 2. Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y'=\dfrac{2(y^2+1)}{x^2-1} \\ y(0)=0 \end{cases}$.

Soluzione. L'equazione $y'=\dfrac{2(y^2+1)}{x^2-1}$ e' a variabile separabili e ha soluzioni $y=tg(\log(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|)+c)$. Imponendo la condizione iniziale si ottiene $y=tg(\log(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|))$.

Esercizio 3. Risolvere il sistema differenziale omogeneo:

$$\begin{cases} y_1'=2y_1+y_2 \\ y_2'=y_1+2y_2 \end{cases} .$$

Soluzione. La matrice dei coefficienti del sistema e' $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ che ha autovalori 3 e 1, con associati autovettori $v_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ quindi

le soluzioni sono $y_1=c_1 e^x+c_2 e^{3\mathrm{x}}$ e $y_2=-c_1 e^x+c_2 e^{3\mathrm{x}}$.

Esercizio 4. Provare che l'equazione $x^4+x^2-1=0$ ha esattamente due soluzioni reali e distinte . Calcolare tali soluzioni con un errore inferiore a 10^{-4} .

Soluzione. Consideriamo la funzione $f(x)=x^4+x^2-1$. Dato che $lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ e $f(0)=-1$ l'equazione ha certamente almeno due soluzioni reali. Per provare che sono esattamente due e distinte osserviamo che da $f'(x)=4x^3+2\mathrm{x}=2\mathrm{x}(2\mathrm{x}^2+1)$ segue che la funzione ha un solo punto di minimo (assoluto) in 0, dove vale -1. Quindi esistono due radici una minore e una maggiore di 0. Dato che la funzione e' simmetrica e' sufficiente concentrarsi sulla radice maggiore di 0. Poiche' per x=1 la funzione vale 1 la radice e' compresa fra 0 e 1. La funzione e' concava e strettamenta crescente in [0,1] quindi applicando il metodo di Newton otteniamo $x_0=1, x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\frac{3x_n^4+x_n^2+1}{4x_n^3+2x_n}$ da cui x=0.7861

(e x= - 0.7861).

(Si poteva anche osservare che si tratta di una equazione biquadratica, risolvendo si trovano due radici complesse coniugate e le due radici reali $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$. Le soluzioni si ottengono approssimando i valori reali trovati).