

**Istituzioni di Matematica - CIA**  
**I Verifica Intermedia - 6 Febbraio 2014**  
**Compito A**

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = \log_3(|x^2 - x| - 1)$ :

- a) Trovare il dominio di definizione  $\mathcal{D}$  di  $f$ .
- b) Determinare  $\{x \in \mathcal{D} \mid f(x) < 0\}$

**Esercizio 2.** Discutere, al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ , la risolubilità del seguente sistema (non si richiede il calcolo esplicito delle soluzioni  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ )

$$\begin{cases} ay + az & = a - 1 \\ x + (a - 2)z + (a + 1)t & = 0 \\ x - z + (2a - 1)t & = a - 1 \end{cases}$$

**Esercizio 3.** Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  il piano  $H$  di equazione  $x + y - 2z = 1$  e la retta  $r$  di equazioni parametriche  $X = (-2, 3, 3) + t(3, -1, -2)$ .

- a) Trovare il punto  $P$  in cui  $r$  interseca  $H$ .
- b) Verificare che il punto  $Q = (4, 1, -1) \in r$ .
- c) Determinare la proiezione ortogonale di  $Q$  su  $H$ .
- d) Determinare equazioni parametriche della proiezione ortogonale di  $r$  su  $H$ .

**Esercizio 4.** Risolvere in campo complesso l'equazione

$$z^4 + (\sqrt{3} - i)\bar{z}^2 = 0.$$

**Esercizio 5.** Risolvere a scelta 2 dei seguenti esercizi:

- i) Provare che  $\forall n \geq 1$  si ha  $4^n + 5^n \leq 9^n$ .
- ii) Calcolare  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 3}}{x}$ .
- iii) Calcolare il termine contenente  $x^{21}$  nello sviluppo di  $(x^3 + 2y)^9$ .
- iv) Sia  $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 3\}$ . Provare che il sottoinsieme

$$W = \{p(x) \in V \mid p(0) = p(2) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

**Istituzioni di Matematica - CIA**  
**I Verifica Intermedia - 6 Febbraio 2014**  
**Compito B**

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = \log_3(|x^2 - x| - 1)$ :

- a) Trovare il dominio di definizione  $\mathcal{D}$  di  $f$ .
- b) Determinare  $\{x \in \mathcal{D} \mid f(x) < 0\}$

**Esercizio 2.** Discutere, al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ , la risolubilità del seguente sistema (non si richiede il calcolo esplicito delle soluzioni  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ )

$$\begin{cases} (1+a)y + (1+a)z & = a \\ x + (a-1)z + (a+1)t & = 0 \\ x - z + 2at & = a \end{cases}$$

**Esercizio 3.** Siano dati in  $\mathbb{R}^3$  il piano  $H$  di equazione  $2x - y + z = 2$  e la retta  $r$  di equazioni parametriche  $X = (0, 2, -2) + t(1, -1, 3)$ .

- a) Trovare il punto  $P$  in cui  $r$  interseca  $H$ .
- b) Verificare che il punto  $Q = (2, 0, 4) \in r$ .
- c) Determinare la proiezione ortogonale di  $Q$  su  $H$ .
- d) Determinare equazioni parametriche della proiezione ortogonale di  $r$  su  $H$ .

**Esercizio 4.** Risolvere in campo complesso l'equazione

$$z^4 + (1 - i\sqrt{3})\bar{z}^2 = 0.$$

**Esercizio 5.** Risolvere a scelta 2 dei seguenti esercizi:

- i) Provare che  $\forall n \geq 1$  si ha  $3^n + 4^n \leq 7^n$ .
- ii) Calcolare  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2}}{x}$ .
- iii) Calcolare il termine contenente  $x^{15}$  nello sviluppo di  $(x^3 + 2y)^9$ .
- iv) Sia  $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 3\}$ . Provare che

$$W = \{p(x) \in V \mid p(-1) = p(1) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di  $V$ .