Istituzioni di Matematica - CIA
III Verifica Intermedia
Tracce delle soluzioni
28 Maggio 2014

Esercizio 1. Calcolare il valore medio della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{3x+1}}$$

sull'intervallo $[1, 5]$. Tale valore è assunto dalla funzione? Se si, in quanti punti? (giustificare le risposte)

Soluzione Il valore medio è dato da $v_m(f) = \frac{1}{4}\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$. Posto $t = \sqrt{3x+1}$ ed effettuando la sostituzione $x = \frac{t^2-1}{3}$ si ottiene:

$$\frac{1}{4}\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}} = \frac{1}{4}\int_2^4 \frac{2dt}{t^2-1} = \frac{1}{4}\left[log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_2^4$$

da cui segue $v_m(f) = \frac{2log(3)-log(5)}{4}$.

Dato che la funzione $f(x)$ è continua sull'intervallo $[1, 5]$ il valore $v_m(f)$ è assunto dalla funzione f. Per vedere in quanti punti, si deve studiare la monotonia della funzione f sull'intervallo. Si ha che $f' = \frac{-9x-2}{2x^2(3x+1)^{3/2}}$ e quindi sull'intervallo $[1, 5]$ la funzione è strettamente decrescente, cosi' il valore medio è assunto solo una volta.

Esercizio 2. Calcolare l'area sottesa dal grafico della funzione $f(x) = \sin(\log(x))$ sull'intervallo $[\frac{1}{e}, e]$.

Soluzione L'area cercata è data da $\int_{1/e}^e |f(x)|dx$. Calcoliamo inizialmente una primitiva di $f(x)$. Con la sostituzione $x = e^t$ si ottiene $\int_{1/e}^e f(x)dx = \int sin(t)e^t dt$ e quindi, integrando per parti si ha $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x(sin(log(x)) - cos(log(x)))$. Dato che per $x \in [\frac{1}{e}, e]$, $f(x) \geq 0$ quando $x \in [1, e]$ e negativa altrove l'area cercata è data da

$$-\int_{1/e}^1 f(x)dx + \int_1^e f(x)dx = \frac{(e^2-1)sin(1) - (e^2+1)cos(1) + 2e}{2e}$$

Esercizio 3. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

i) $\begin{cases} (1+x^3)y' - 3x^2y = (x^2-x+1)^2(1+x) \\ y(0) = 5 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \sqrt{9-x^2}\ y' = e^{-\frac{y}{2}}\arcsin(\frac{x}{3}) \\ y(\frac{3}{2}) = 0 \end{cases}$

Soluzione. i) Sitratta di una equazione lineare del primo ordine. Dividendo per $(1+x^3) = (1+x)(x^2-x+1)$, con alcuni passaggi algebrici, si ottiene

$$y' = \frac{3x^2}{1+x^3}\ y + (x^2-x+1)$$

Dato che $\int \frac{3x^2}{1+x^3}dx = log(1+x^3)$ le soluzioni sono date da

$$y(x) = (1+x^3)\int \frac{1}{1+x^3}(x^2-x+1)dx = (1+x^3)(log(|1+x|+c)$$

Imponendo la condizione $y(0) = c = 5$, si ha la soluzione.

ii) Moltiplicando entrambi i membri per $\frac{e^{\frac{y}{2}}}{\sqrt{9-x^2}}$ si ottiene:

$$e^{\frac{y}{2}}\ y' = \frac{\arcsin(\frac{x}{3})}{\sqrt{9-x^2}}$$

Si tratta quindi di un'equazione a variabili separabili. Si ha quindi

$$2e^{\frac{y}{2}} = \int e^{\frac{y}{2}}\ dy = \int \frac{\arcsin(\frac{x}{3})}{\sqrt{9-x^2}}\ dx = \frac{1}{2}\arcsin^2(\frac{x}{3}) + c'$$

da cui si ottiene

$$y(x) = 2log(\frac{1}{4}\ \arcsin^2(\frac{x}{3}) + c)$$

imponendo la condizione $y(\frac{3}{2}) = 2log(\frac{\pi^2}{64} + c) = 0$, la soluzione si ottiene per $c = 1 - \frac{\pi^2}{64}$.