Istituzioni di Matematica - CIA
I Verifica Intermedia - 6 Febbraio 2014
Compito A

Esercizio 1. Sia $f(x) = log_3(|x^2 - x| - 1)$:
a) Trovare il dominio di definizione $\mathcal{D}$ di f .
b) Determinare $\{x \in \mathcal{D} \mid f(x) < 0\}$

Soluzone. a) la funzione è definita quando $|x^2 - x| - 1 > 0$ ossia se: $\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x^2 - x > 1 \end{cases}$
oppure se $\begin{cases} x^2 - x \leq 0 \\ x - x^2 > 1 \end{cases}$.
Dal primo sistema si ottiene che $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, mentre il secondo sistema non ha soluzioni. Quindi $\mathcal{D} = (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.
b) Dal punto a) si ha che per $x \in \mathcal{D}$ vale $x^2 - x \geq 0$ e quindi si può eliminare il valore assoluto e considerare $f(x) = log_3(x^2 - x - 1)$. Dato che la base del logaritmo è maggiore di 1, $f(x) < 0$ se $x^2 - x - 1 < 1$ e quindi per $x \in (-1, 2) \cap \mathcal{D} = (-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}), 2)$.
Esercizio 2. Discutere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la risolubilità del seguente sistema (non si richiede il calcolo esplicito delle soluzioni $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$)

$$\begin{cases} ay + az & = & a - 1 \\ x + (a-2)z + (a+1)t & = & 0 \\ x - z + (2a-1)t & = & a - 1 \end{cases}$$

Soluzione.
La matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ 1 & 0 & a-2 & a+1 \\ 1 & 0 & -1 & 2a-1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 & a-1 \\ 1 & 0 & a-2 & a+1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2a-1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha soluzione se e solo se $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$. Riducendo a scalini la matrice A' con operazioni elementari per riga, si ottiene che

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2a-1 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 2-a \end{pmatrix} \quad S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2a-1 & a-1 \\ 0 & a & a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 2-a & 1-a \end{pmatrix}$$

sono matrici ridotte a scalini ripettivamente di A e A', per cui $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} S$ e $\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} S'$.

Se $a \neq 0$ e $a \neq 1$, si ha $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} S = 3$ e $\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} S' = 3$, per cui il sistema è risolubile ed ha ∞^1 soluzioni.

Se $a = 0$ la seconda riga di S' corrisponde all'equazione $0x+0y+0z+0t = -1$, per cui il sistema è evidentemente impossibile.

Se $a = 1$, $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; dunque $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} S = 3$ e $\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} S' = 3$, per cui il sistema è risolubile ed ha ∞^1 soluzioni.

Esercizio 3. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ il piano H di equazione $x + y - 2z = 1$ e la retta r di equazioni parametriche $X = (-2, 3, 3) + t(3, -1, -2)$.

a) Trovare il punto P in cui r interseca H.

b) Verificare che il punto $Q = (4, 1, -1) \in r$.

c) Determinare la proiezione ortogonale di Q su H.

d) Determinare equazioni parametriche della proiezione ortogonale di r su H.

Soluzione.

a) I punti della retta r hanno coordinate $(-2+3t, 3-t, 3-2t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Un tale punto appartiene al piano H se e solo se soddisfa l'equazione di H, cioè se e solo se $(-2+3t) + (3-t) - 2(3-2t) = 1$, ossia se e solo se $6t = 6$. Il punto di intersezione di r e H si trova quindi in corrispondenza del valore $t = 1$, per cui $P = (1, 2, 1)$.

b) Q appartiene alla retta r se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $(-2+3t, 3-t, 3-2t) = (4, 1, -1)$. Si vede facilmente che ciò accade per $t = 2$, per cui $Q \in r$.

c) Il punto cercato M è l'intersezione del piano H con la retta s passante per Q e ortogonale ad H. Poiché H è ortogonale al vettore $(1, 1, -2)$, la retta s dovrà essere parallela a tale vettore ed avrà dunque equazioni parametriche $X = (4, 1, -1) + t(1, 1, -2)$. Tale retta interseca il piano H in corrispondenza del valore $t = -1$, per cui $M = (3, 0, 1)$.

d) Sia $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to H$ l'applicazione che associa ad ogni punto di $\mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale su H. La retta cercata è dunque la retta $\pi(r)$. Poiché $\pi(P) = P$ e $\pi(Q) = M$, la retta $\pi(r)$ è la retta congiungente i punti $P = (1, 2, 1)$ e $M = (3, 0, 1)$ ed ha quindi equazioni $X = (1, 2, 1) + t(1, -2, 0)$.

Esercizio 4. Risolvere in campo complesso l'equazione

$$z^4 + (\sqrt{3} - i)\overline{z}^2 = 0.$$

Soluzione. Poniamo $z = r(\cos(t)+i\sin(t)$. L'equazione diventa $r^4(\cos(4t)+i\sin(4t)) = (-\sqrt{3}+i)r^2(\cos(-2t)+i\sin(-2t))$. Dato che $-\sqrt{3}+i = 2(\cos(\frac{5}{6}\pi)+i\sin(\frac{5}{6}\pi))$, si deve avere: $r^4 = 2r^2$ e $4t = \frac{5}{6}\pi - 2t + 2k\pi$. Quindi le soluzioni sono $z = 0$, $z_k = \sqrt{2}(\cos(\frac{5}{36}\pi + \frac{k}{3}\pi) + i\sin(\frac{5}{36}\pi + \frac{k}{3}\pi))$ con $0 \le k \le 5$.

Esercizio 5. Risolvere a scelta 2 dei seguenti esercizi:

i) Provare che $\forall n \ge 1$ si ha $4^n + 5^n \le 9^n$.

ii) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2-3}}{x}$.

iii) Calcolare il termine contenente x^{21} nello sviluppo di $(x^3+2y)^9$.

iv) Sia $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid deg(p) \le 3\}$. Provare che il sottoinsieme

$$W = \{p \in V \mid p(0) = p(2) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di V.

Soluzione. i) Proviamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 1$ si ha :$4+5 = 9 \le 9$ quindi la relazione è verificata. Supponiamola vera per $n \ge 1$ e proviamo per $n+1$: $4^{n+1} + 5^{n+1} = 4 \cdot 4^n + 5 \cdot 5^n \le 9 \cdot 4^n + 9 \cdot 5^n = 9(4^n + 5^n) \le 9 \cdot 9^n = 9^{n+1}$.

ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2-3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{9 - \frac{3}{x^2}} = -3.$

iii) Il termine cercato e dato da $\binom{9}{7}(x^3)^7(2y)^2 = 36x^{21}(2y)^2 = 144x^{21}y^2$.

iv) Basta provare che:

a) $W \ne \emptyset \iff 0 \in W$

b) Se $p, q \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\alpha p + \beta q \in W$.

a) è ovviamente soddisfatta. Se poi $p, q \in W \iff p(0) = p(2) = q(0) = q(2) = 0$ dato che $\forall c \in \mathbb{R}$, vale $(\alpha p + \beta q)(c) = \alpha p(c) + \beta q(c)$ si ha $(\alpha p + \beta q)(0) = (\alpha p + \beta q)(2) = 0 \iff (\alpha p + \beta q) \in W$.

Istituzioni di Matematica - CIA
I Verifica Intermedia - 6 Febbraio 2014
Compito B

Esercizio 1. Sia $f(x) = log_3(|x^2 - x| - 1)$:

a) Trovare il dominio di definizione $\mathcal{D}$ di f .
b) Determinare $\{x \in \mathcal{D} \mid f(x) < 0\}$

Esercizio 2. Discutere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la risolubilità del seguente sistema (non si richiede il calcolo esplicito delle soluzioni $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$)

$$\begin{cases} (1+a)y + (1+a)z & = & a \\ x + (a-1)z + (a+1)t & = & 0 \\ x - z + 2at & = & a \end{cases}$$

Soluzione.
La matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+a & 1+a & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & a+1 \\ 1 & 0 & -1 & 2a \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1+a & 1+a & 0 & a \\ 1 & 0 & a-1 & a+1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2a & a \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha soluzione se e solo se $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$. Riducendo a scalini la matrice A' con operazioni elementari per riga, si ottiene che

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2a \\ 0 & 1+a & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1-a \end{pmatrix} \quad S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2a & a \\ 0 & 1+a & 1+a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 1-a & -a \end{pmatrix}$$

sono matrici ridotte a scalini ripettivamente di A e A', per cui $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} S$ e $\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} S'$.

Se $a \neq 0$ e $a \neq -1$, si ha $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} S = 3$ e $\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} S' = 3$, per cui il sistema è risolubile ed ha ∞^1 soluzioni.

Se $a = -1$ la seconda riga di S' corrisponde all'equazione $0x + 0y + 0z + 0t = -1$, per cui il sistema è evidentemente impossibile.

Se $a = 0$, $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; dunque $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} S = 3$ e $\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} S' = 3$, per cui il sistema è risolubile ed ha ∞^1 soluzioni.

Esercizio 3. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ il piano H di equazione $2x - y + z = 2$ e la retta r di equazioni parametriche $X = (0, 2, -2) + t(1, -1, 3)$.

a) Trovare il punto P in cui r interseca H.
b) Verificare che il punto $Q = (2, 0, 4) \in r$.
c) Determinare la proiezione ortogonale di Q su H.
d) Determinare equazioni parametriche della proiezione ortogonale di r su H.

Soluzione.
a) I punti della retta r hanno coordinate $(t, 2 - t, -2 + 3t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Un tale punto appartiene al piano H se e solo se soddisfa l'equazione di H, cioè se e solo se $2t-(2-t)+(-2+3t) = 2$, ossia se e solo se $6t = 6$. Il punto di intersezione di r e H si trova quindi in corrispondenza del valore $t = 1$, per cui $P = (1, 1, 1)$.

b) Q appartiene alla retta r se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $(t, 2-t, -2+3t) = (2, 0, 4)$. Si vede facilmente che ciò accade per $t = 2$, per cui $Q \in r$.

c) Il punto cercato M è l'intersezione del piano H con la retta s passante per Q e ortogonale ad H. Poiché H è ortogonale al vettore $(2, -1, 1)$, la retta s dovrà essere parallela a tale vettore ed avrà dunque equazioni parametriche $X = (2, 0, 4) + t(2, -1, 1)$. Tale retta interseca il piano H in corrispondenza del valore $t = -1$, per cui $M = (0, 1, 3)$.

d) Sia $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to H$ l'applicazione che associa ad ogni punto di $\mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale su H. La retta cercata è dunque la retta $\pi(r)$. Poiché $\pi(P) = P$ e $\pi(Q) = M$, la retta $\pi(r)$ è la retta congiungente i punti $P = (1, 1, 1)$ e $M = (0, 1, 3)$ ed ha quindi equazioni $X = (1, 1, 1) + t(1, 0, -2)$.

Esercizio 4. Risolvere in campo complesso l'equazione

$$z^4 + (1 - i\sqrt{3})\overline{z}^2 = 0.$$

Soluzione. Poniamo $z = r(\cos(t)+i\sin(t)$. L'equazione diventa $r^4(\cos(4t)+ i\sin(4t)) = (-1 + \sqrt{3}i)r^2(\cos(-2t) + i\sin(-2t))$. Dato che $-1 + \sqrt{3}i = 2(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi))$, si deve avere: $r^4 = 2r^2$ e $4t = \frac{2}{3}\pi - 2t + 2k\pi$. Quindi le soluzioni sono $z = 0$, $z_k = \sqrt{2}(\cos(\frac{1}{9}\pi + \frac{k}{3}\pi) + i\sin(\frac{1}{9}\pi + \frac{k}{3}\pi))$ con $0 \leq k \leq 5$.

Esercizio 5. Risolvere a scelta 2 dei seguenti esercizi:

i) Provare che $\forall n \geq 1$ si ha $3^n + 4^n \leq 7^n$.
ii) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2}}{x}$.
iii) Calcolare il termine contenente x^{15} nello sviluppo di $(x^3 + 2y)^9$.

iv) Sia $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid deg(p) \leq 3\}$. Provare che

$$W = \{p \in V \mid p(-1) = p(1) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di V.

Soluzione. i) Proviamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 1$ si ha :$3 + 4 = 7 \leq 7$ quindi la relazione è verificata. Supponiamola vera per $n \geq 1$ e proviamo per $n + 1$: $3^{n+1} + 4^{n+1} = 3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n \leq 7 \cdot 3^n + 7 \cdot 4^n = 7(3^n + 4^n) \leq 7 \cdot 7^n = 7^{n+1}$.

ii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{4 - \frac{2}{x^2}} = -2$.

iii) Il termine cercato e dato da $\binom{9}{5}(x^3)^5(2y)^4 = 126x^{15}(2y)^4 = 2016x^{15}y^4$.

iv) Basta provare che:

a) $W \neq \emptyset \iff 0 \in W$

b) Se $p, q \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\alpha p + \beta q \in W$.

a) è ovviamente soddisfatta. Se poi $p, q \in W \iff p(-1) = p(1) = q(-1) = q(1) = 0$ dato che $\forall c \in \mathbb{R}$, vale $(\alpha p + \beta q)(c) = \alpha p(c) + \beta q(c)$ si ha $(\alpha p + \beta q)(-1) = (\alpha p + \beta q)(1) = 0 \iff (\alpha p + \beta q) \in W$.