Istituzioni di Matematica - CIA
II Verifica Intermedia
2 Aprile 2014
Correzione

Esercizio 1. Provare che l'equazione $x^3 - 4x^2 + 10x - 8 = 0$ ha una sola soluzione reale α e che $\alpha \in (1, \sqrt{2})$.

Soluzione. Se $f(x) = x^3 - 4x^2 + 10x - 8$, si ha $f(1) = -1 < 0$ e $f(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} - 16 > 0$. Dato che la funzione è continua, esiste una radice $\alpha \in (1, \sqrt{2})$ di $f(x) = 0$. Inoltre $f'(x) = 3x^2 - 8x + 10 > 0$ pr ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la soluzione trovata è unica.

Esercizio 2. Provare che la funzione $f(x) = \frac{2\,x^2-1}{x^2+1}$ è invertibile su $\mathcal{D} = [0, +\infty)$. Calcolare il dominio della funzione inversa e $(D\, f^{-1})(\frac{1}{2})$.

Soluzione. La funzione è derivabile su $\mathcal{D}$ e si ha $f'(x) = \frac{6\,x}{(x^2+1)^2}$, quindi la funzione è strettamente crescente su $\mathcal{D}$ e quindi è invertibile su $\mathcal{D}$. Dato che $f(0) = -1$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $f(\mathcal{D}) = [-1, 2)$ e quindi il dominio della funzione inversa è $[-1, 2)$. Vale $f(1) = \frac{1}{2}$, cosí $(D\, f^{-1})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(D\, f)(1)} = \frac{2}{3}$.

Esercizio 3. Al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$ si considerino le matrici

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & h-3 \\ 1+h & -1 & 1+h \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui A_h è diagonalizzabile.
b) Si determini la dimensione di $\operatorname{Ker} B$ e una base di $\operatorname{Im} B$.
c) Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\operatorname{Im} B$ coincide con un autospazio di A_h.

Soluzione. a) Il polinomio caratteristico di A_h è $p_k(t) = (t-h)(t+h)(2-t)$. Se $h \neq 0$, $h \neq 2$ e $h \neq -2$, A_h ha 3 autovalori distinti e dunque è diagonalizzabile.

Se $h = 0$, la matrice $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha l'autovalore 2 di molteplicità algebrica 1 e l'autovalore 0 di molteplicità algebrica 2. Poiché $\dim V(0) = \dim \operatorname{Ker} A_0 = 3 - \operatorname{rk} A_0 = 3 - 2 = 1$, la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è 1. Pertanto A_0 non è diagonalizzabile.

Se $h = 2$, la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha l'autovalore -2 di molteplicità algebrica 1 e l'autovalore 2 di molteplicità algebrica 2. Poiché $\dim V(2) =$

$$\dim \mathrm{Ker}(A_2 - 2\,I) = 3 - \mathrm{rk}(A_2 - 2\,I) = 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è 2. Pertanto A_2 è diagonalizzabile.

Se $h = -2$, la matrice $A_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha l'autovalore -2 di molteplicità algebrica 1 e l'autovalore 2 di molteplicità algebrica 2. Poiché $\dim V(2) = \dim \mathrm{Ker}(A_{-2} - 2\,I) = 3 - \mathrm{rk}(A_{-2} - 2\,I) = 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$, la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è 1. Pertanto A_{-2} non è diagonalizzabile.

b) Il nucleo dell'applicazione lineare $B\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $X \to BX$ coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $BX = 0$. La matrice B ha rango 2, per cui $\dim \mathrm{Ker}\, B = 4 - 2 = 2$. L'immagine di B è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di B; essendo $\mathrm{rk}\, B = 2$, la dimensione di $\mathrm{Im}\, B$ è 2. Poiché ad esempio le prime due colonne di B sono vettori di $\mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti, i vettori $(1, 2, 1)$ e $(0, 1, 1)$ sono una base di $\mathrm{Im}\, B$.

c) Come visto nel punto b), $\mathrm{Im}\, B$ ha dimensione 2. D'altra parte dalla soluzione del punto a) risulta che l'unico caso in cui A_h ha un autospazio di dimensione 2 è quando $h = 2$; in questo caso l'unico autospazio di A_2 di dimensione 2 è $V(2, A_2) = \mathrm{Ker}(A_2 - 2\,I) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. Si verifica immediatamente che i vettori $(1, 2, 1)$ e $(0, 1, 1)$ appartengono a $V(2, A_2)$, per cui $\mathrm{Im}\, B = Span((1, 2, 1), (0, 1, 1)) \subseteq V(2, A_2)$. Visto che $\dim \mathrm{Im}\, B = \dim V(2, A_2) = 2$, segue che $\mathrm{Im}\, B = V(2, A_2)$. Dunque l'unico valore che soddisfa la richiesta dell'esercizio è $h = 2$.

Esercizio 4. Sia $f(x) = \frac{e+x}{log(x+e)}$:

a) Trovare il dominio di definizione $\mathcal{D}$ di f .
b) Determinare $\{x \in \mathcal{D} \mid f(x) < 0\}$.
c) Determinare gli eventuali asintoti.
d) Trovare le coordinate di massimi e minimi relativi e assoluti e gli intervalli di crescenza e decrescenza di f.
e) Determinare gli eventuali flessi e su quali intervalli la funzione è convessa.
f) disegnare il grafico di f
g) Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 1$?

Soluzione. a) $\mathcal{D} = (-e, 1 - e) \cup (1 - e, +\infty)$
b) $f(x) < 0$ per $x \in (-e, 1 - e)$.

c) Dato che $\lim\limits_{x \to (1-e)^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to (1-e)^+} f(x) = +\infty$, in $x = 1 - e$ si ha un asintoto verticale.
Vale anche $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ quindi potrebbe esistere un asintoto obliquo, ma, dato che $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, non c' è asintoto obliquo.
d) $f'(x) = \frac{\log(x+e)-1}{\log^2(x+e)}$ quindi la funzione è derivabile su tutto l 'insieme di definizione e $f'(x) > 0$ se $x > 0$. La funzione è crescente per $x \in (0, +\infty)$, decrescente altrove. Per $x = 0$, (con $f(0) = e$) si ha un minimo relativo.
d) $f''(x) = \frac{\log^2(x+e)-2\log(x+e)(\log(x+e)-1)}{(x+e)\log^4(x+e)} = \frac{\log(x+e)(2-\log(x+e))}{(x+e)\log^4(x+e)}$
quindi $f''(x) = 0$ se $x = e^2 - e$, in $(e^2 - e, \frac{e^2}{2})$ si ha un flesso e la funzione è convessa per $x \in (1 - e, e^2 - e)$, dove $f'' > 0$.
g) dato che $\lim\limits_{x \to -e^+} f(x) = 0$, f è decrescente per $x \in (-e, 1-e)$ e il minimo valore di $f(x)$ sull'intervallo $(1 - e, +\infty)$ è $f(x) = e$, non ci sono soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$.