Istituzioni di Matematica - CIA
I Verifica Intermedia
17 Dicembre 2014
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

i) Se $n, m \in \mathbb{N}^+$ allora $\frac{\sqrt[3]{8n^4m^6}}{\sqrt[6]{n^{14}m^{12}}} \in \mathbb{Q}$

ii) $\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\} = \emptyset$

iii) Se $A = \{\frac{x+1}{x} \mid x \in \mathbb{R}^+\}$ allora $\inf A = 1$.

iv) Se $f\colon A \longrightarrow B$ è un'applicazione iniettiva e $A_1, A_2 \subset A$, allora $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Soluzione. i) Vero. Infatti semplificando si ottiene $\frac{\sqrt[3]{8n^4m^6}}{\sqrt[6]{n^{14}m^{12}}} = \frac{2}{n} \in \mathbb{Q}$
ii) Falso. L'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\}$ è il sottoinsieme dei numeri pari.
iii) Vero. $1 \notin A$ ma sicuramente è un minorante, dato che $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, vale $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} > 1$. Per verificare che è il massimo dei minoranti, ossia che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $a = 1 + \frac{1}{x} \in A$ tale che $1 < a < 1 + \epsilon$, basta osservare che $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ e quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M > 0 \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x > M$ si ha $\frac{1}{x} < \epsilon$.
iv) Vero. Sicuramente $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, perche' se $b \in f(A_1 \cap A_2)$ allora esiste $a \in A_1 \cap A_2$ tale che $b = f(a)$ e quindi $b \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Proviamo l'inclusione opposta. Sia $b \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Allora esistono $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$ tali che $b = f(a_1) = f(a_2)$. Dato che f è iniettiva si deve avere $a_1 = a_2 \in A_1 \cap A_2$ e quindi $b \in f(A_1 \cap A_2)$.

Esercizio 2. Risolvere le seguenti disequazioni:

i) $e^{|x-1|} < e^x$;

ii) $\log_{\frac{1}{3}}(3x^2 - 2x) < 0$;

iii) $\sin^2(x) < \sin(x)$.

Soluzione. i) Dato che la funzione esponenziale è strettamente crescente la disequazione è verificata se $|x - 1| < x$, ossia se $x > \frac{1}{2}$.
ii)) La diseguaglianza ha senso se $3x^2 - 2x > 0$. La base del logaritmo è minore di 1, quindi la funzione è strettamente decrescente e la disequazione è verificata se e solo se $3x^2 - 2x > 1 > 0$, quindi se e solo se $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$.
iii) La disequazione si riscrive come $\sin(x)(\sin(x) - 1) < 0$. Quindi la disequazione è verificata se $2k\pi < x < 2(k+1)\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Sia f una funzione continua su $\mathbb{R}$ e supponiamo che f abbia valore massimo 6 e valore minimo -12. Quale delle seguenti affermazioni <u>deve</u> essere vera, <u>può</u> essere vera, <u>non può</u> essere vera.

i) Il massimo valore di $f(|x|)$ è 12;

ii) il minimo valore di $f(|x|)$ è 0;
iii) Il massimo valore di $|f(x)|$ è 12;
iv) il minimo valore di $|f(x)|$ è 6.

Soluzione. i) Falso. Si ha $f(|x|) = f(x)\ \ \forall x \geq 0$ e $f(|x|) = f(-x)\ \ \forall x < 0$. Poiché $f(x) \leq 6$ per ogni valore di x, allora anche $f(|x|) \leq 6$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
ii) È possibile e ciò accade se sulla semiretta $[0, \infty)$ f assume solo valori maggiori o ugulai a 0.
iii) Vero. Esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $-12 = f(x_0) \leq f(x) \leq 6 \leq 12$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; da ciò segue che $|f(x)| \leq 12$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|f(x_0)| = 12$.
iv) Falso. Dato che la funzione è continua e assume valori negativi e positivi, esiste almeno un valore $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$ e quindi il minimo valore di $|f(x)|$ è 0.

Esercizio 4. Siano $f(x) = \frac{|x|+1}{x}$, $g(x) = log(x)$ e $h(x) = \sqrt{x}$ e sia $F = h \circ g \circ f$.

i) Trovare il dominio di definizione di F.
ii) Trovare i limiti agli estremi del dominio di definizione.
iii) F è invertibile?
iv) Trovare il dominio di F^{-1}.

Soluzione. i) $F(x) = \sqrt{log\left(\frac{|x|+1}{x}\right)}$. Naturalmente deve essere $x \neq 0$. Per ogni $x < 0$ si ha $\frac{|x|+1}{x} < 0$, e quindi $F(x)$ non è definita perché l'argomento del logaritmo è negativo. D'altra parte se $x > 0$ si ha $\frac{|x|+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} > 1$, per cui il radicando è positivo. Pertanto il dominio di definizione di F è $(0, \infty)$.
ii) Dato che $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x}) = 1$, si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Analogamente dato che $\lim_{x\to 0^+}(1 + \frac{1}{x}) = +\infty$, si ha $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
iii) Calcolando la derivata della funzione

$$F'(x) = -\frac{1}{2x(x+1)\sqrt{log\left(\frac{x+1}{x}\right)}}$$

otteniamo che la funzione F è derivabile sul suo dominio di definizione D e $F'(x) < 0$ per ogni $x \in D$, ossia la funzione F è strettamente decrescente, quindi invertibile su D.
iv) Il dominio di F^{-1} coincide con $\mathrm{Im}(F) = (0, +\infty)$.

Esercizio 5. Denotiamo con G il grafico della funzione $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$. Determinare un punto P su G tale che la retta tangente a G in P sia parallela alla retta passante per i punti $Q_1 = (2, 3)$ e $Q_2 = (1, -4)$.

Soluzione. La retta r passante per i punti Q_1 e Q_2 ha equazione $y = 7x - 11$, cioè ha pendenza 7. La retta tangente a G in un punto $P = (x_0, y_0)$

ha pendenza $f'(x_0) = 4x_0 + 3$. Affinché questa tangente sia parallela ad r si deve allora avere $4x_0 + 3 = 7$ ossia $x_0 = 1$. Il punto P è dunque $(1, f(1)) = (1, 4)$. Osserviamo che la retta tangente a G in $(1, 4)$ ha equazione $y = 7x - 3$.