Istituzioni di Matematica - CIA
II Verifica Intermedia
17 Aprile 2015

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o se è falsa, giustificando la risposta.

i) Sia data la funzione $f(x) = \sin(2x - 5)$; allora
  (1) il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq 2x - 5 \leq 5\}$
  (2) $Im(f) = [-1, 1]$
  (3) f ha periodo $T = \pi + \frac{5}{2}$
  (4) f ha periodo $T = \pi$.

ii) Sia $g(x) = |2x| - x$. Allora
  (1) g non è continua su $\mathbb{R}$
  (2) g ha un punto di minimo
  (3) esiste un un intervallo in cui g è negativa
  (4) dato che $g(1) = g(-\frac{1}{3}) = 1$ esiste un punto $c \in (-\frac{1}{3}, 1)$ tale che $g'(c) = 0$.

iii) La funzione $h(x) = \frac{e^x}{|x|-1}$
  (1) ha un punto di minimo relativo
  (2) non ha punti a tangente orizzontale
  (3) ha un punto di massimo relativo in $x_0 = 1$
  (4) si può applicare ad h il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Soluzione. i) (1) è falsa: il dominio di f è $\mathbb{R}$.
(2) è vera perché $Im(f)$ coincide con l'immagine della funzione $\sin(x)$.
(3) è falsa e (4) è vera: dato che $f(x + \pi) = \sin(2(x + \pi) - 5) = \sin((2x - 5) + 2\pi) = \sin(2x - 5) = f(x)$, essendo la funzione $\sin(x)$ periodica di periodo 2π.

ii) (1) è falsa perché g è somma di funzioni continue su $\mathbb{R}$.
Si ha

$$g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -3x & x < 0 \end{cases}$$

quindi $x = 0$ è un punto di minimo (assoluto) per cui (2) è vera, mentre (3) è falsa.
(4) è falsa: la funzione non è derivabile in $x = 0$ quindi non si può applicare direttamente il teorema di Rolle. Inoltre dalle considerazioni precedenti si vede che $g'(x) = 1$ per $x > 0$ e $g'(x) = -3$ per $x < 0$.

iii) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Inoltre dato che $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x) = -1$, la funzione è continua sul suo

dominio di definizione. Per $x > 0$ si ha $h'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$ e quindi $x = 2$ è un punto di minimo, che è un punto di minimo relativo dato che $-1 = h(0) < h(2) = e^2$.
(2) è falsa perché, essendo $h'(2) = 0$, la tangente al grafico nel punto $(2, e^2)$ è orizzontale.
(3) è falsa: la funzione non è definita in $x_0 = 1$.
(4) è falsa. Si ha che $\lim_{x\to 0^+} h'(x) = -2 \neq 0 = \lim_{x\to 0^-} h'(x)$ e quindi la funzione (che è continua su $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$) non è derivabile su $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; pertanto non si può applicare il teorema di Lagrange.

Esercizio 2. Dire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} & x < 0 \\ 1 + e^{-\frac{1}{\sin(x)}} & 0 < x < \pi \end{cases}$$

è estendibile con continuità in $x = 0$ e in tal caso se è derivabile.

Soluzione. Dato che $\lim_{x\to 0^+} 1 + e^{-\frac{1}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{arctg(x)}{x} = 1$ la funzione è continua in $x = 0$. Inoltre per $x < 0$ si ha $f'(x) = \frac{x-(1+x^2)arctg(x)}{x^2(1+x^2)}$.
Per calcolare $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$ applichiamo il teorema dell'Hôpital e otteniamo $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-arctg(x)}{1+2x^2} = 0$. Per $x > 0$ si ha $f'(x) = \cos(x)\frac{e^{-\frac{1}{\sin(x)}}}{\sin^2(x)}$. Per calcolare $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ basta allora calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{\sin(x)}}}{\sin^2(x)}$. Con la sostituzione $\frac{1}{\sin(x)} = y$ il limite si riduce a $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{\sin(x)}}}{\sin^2(x)} = \lim_{y\to +\infty} y^2 e^{-y} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$, quindi la funzione è anche derivabile per $x = 0$.

Esercizio 3. i) Provare che esistono due valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che i piani $\pi_1 : 3x + 2z = 0$, $\pi_2 : 4x - 6y - az = 0$ e $\pi_3 : x + 2ay + z = 0$ si intersecano in una retta e determinare le equazioni di tali rette.
ii) La retta di equazione

$$\begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2 - 6t \\ z &= 1 + t \end{cases}$$

è perpendicolare a una delle due rette ottenute in i) ?

Soluzione. i) I punti in cui i tre piani si intersecano sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 3x+2z=0 \\ 4x-6y-az=0 \\ x+2ay+z=0 \end{cases} .$$

Le soluzioni di tale sistema formeranno una retta se e solo se la matrice dei coefficienti

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & -a \\ 1 & 2a & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Poiché $\det A = 6a^2+16a-6 = 2(3a-1)(a+3)$, gli unici valori di a per cui il rango di A può valere 2 sono $a=\frac{1}{3}$ oppure $a=-3$.

Nel caso $a=\frac{1}{3}$ l'insieme delle soluzioni del sistema è $\{(-\frac{2}{3}t, -\frac{1}{2}t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, ossia la retta r_1 per l'origine di equazione parametrica

$$\begin{cases} x=-\frac{2}{3}t \\ y=-\frac{1}{2}t \\ z=t \end{cases} .$$

Nel caso $a=-3$ l'insieme delle soluzioni del sistema è $\{(-\frac{2}{3}t, \frac{1}{18}t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, ossia la retta r_2 per l'origine di equazione parametrica

$$\begin{cases} x=-\frac{2}{3}t \\ y=\frac{1}{18}t \\ z=t \end{cases} .$$

ii) La retta s assegnata nel testo è parallela al vettore $w=(1,-6,1)$. Poiché r_1 è parallela al vettore $v_1=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2},1)$ e $<w,v_1>\neq 0$, allora r_1 non è perpendicolare ad s. Poiché r_2 è parallela al vettore $v_2=(-\frac{2}{3},\frac{1}{18},1)$ e $<w,v_2>=0$, allora r_2 è perpendicolare ad s.

Esercizio 4. Decidere se la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

è invertibile e in caso affermativo calcolare la sua inversa.

Soluzione. Riducendo a scalini la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da ciò si riconosce che A è invertibile; con ulteriori operazioni elementari per riga si riduce la matrice a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

per cui

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Sia $\alpha = 2i(-1+i) + \overline{(\sqrt{3}+i)}^3 + (1+i)\overline{(1+i)} \in \mathbb{C}$. Calcolare le radici terze di α ed esprimerle in forma algebrica.

Soluzione. Si ha $\alpha = -10i$ qundi $|\alpha| = 10$ e $\arg(\alpha) = \frac{3}{2}\pi$. Posto $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ si deve risolvere $z^3 = 10(\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi))$. Si ottengono dunque le soluzioni $z_k = \sqrt[3]{10}(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}))$ con $k = 0, 1, 2$, che in forma algebrica sono uguali a $z_0 = \sqrt[3]{10}i$, $z_1 = \sqrt[3]{10}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$ e $z_2 = \sqrt[3]{10}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$