Istituzioni di Matematica - CIA
III Verifica Intermedia
27 Maggio 2015
Tracce delle soluzioni

Esercizio 1. Calcolare l'area della regione del piano compresa fra i grafici delle funzioni $y = 3x^2 + 5x - 1$ e $y = 2x + 5$.

Soluzione. risolvendo il sistema $\begin{cases} y = 3x^2 + 5x - 1 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$
si trova che i due grafici (di una retta e di una parabola) si intersecano nei punti $A = (-2, 1)$ e $B = (1, 7)$. Dato che nell'intervallo $[-2, 1]$ si ha che $2x + 5 \geq 3x^2 + 5x - 1$ l'area cercata è data da

$$\int_{-2}^{1} ((2x + 5) - (3x^2 + 5x - 1))dx = \frac{27}{2}.$$

Esercizio 2. Calcolare $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+5\sqrt{2x}+6)}dx$.

Soluzione. La funzione integranda è continua su $[\frac{1}{2}, +\infty)$, ma l'intervallo di integrazione non è limitato. Con la sostituzione $t = \sqrt{2x}$ si ottiene $\int \frac{dt}{t^2+5t+6} = \log\left|\frac{t+2}{t+3}\right|$ da cui

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x + 5\sqrt{2x} + 6)}dx = \lim_{b\to+\infty} \log\left|\frac{\sqrt{2x} + 2}{\sqrt{2x} + 3}\right| - \log\frac{3}{4} = -\log\frac{3}{4}.$$

Esercizio 3. Trovare le soluzioni dell'equzione $2x^2yy' = 1 + y^2$. Trovare, se esiste, la soluzione tale che $y(1) = 1$.

Soluzione. Separando le variabili si ottiene (per $x \neq 0$)

$$\frac{2yy'}{1 + y^2} = \frac{1}{x^2}$$

integrando si ha $log(1 + y^2) = -\frac{1}{x} + c$ da cui le soluzioni sono:

$$y = \pm\sqrt{e^{-\frac{1}{x}+c} - 1}$$

Dato che si vuole $y(1) = 1$ consideriamo $y(x) = \sqrt{e^{-\frac{1}{x}+c} - 1}$. Imponendo la condizione si ottiene $1 = \sqrt{e^{-1+c} - 1}$ da cui $c = \log(2e)$.

Esercizio 4. Risolvere a scelta uno dei seguenti esercizi.

i) Determinare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni dell'equazione $e^{x^9-9x+1} = a$.

ii) Date le rette

$$r_1 = \begin{cases} x - z + 4 = 0 \\ y + 11 = 0 \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ ax + z + 2 = 0 \end{cases}$$

determinarne la posizione reciproca al variare di $a \in \mathbb{R}$

Soluzione.

i) La funzione $f(x) = e^{x^9-9x+1}$ è definita, continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e ha per immagine $(0, +\infty)$, quindi sicuramente non esistono soluzioni per $a \leq 0$. Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, inoltre $f'(x) = 9(x^8-1)f(x)$ quindi in $x = -1$ si ha un punto di massimo relativo, e $f(-1) = e^9$, e in $x = 1$ un punto di minimo relativo, con $f(1) = e^{-7}$. Tracciando il grafico di f si conclude allora che:
(1) per $0 < a < e^{-7}$ e per $a > e^9$ esiste una sola soluzione
(2) per $a = e^{-7}$ e per $a = e^9$ esistono due soluzioni
(3) per $e^{-7} < a < e^9$ esistono tre soluzioni.

iii) Il sistema

$$\begin{cases} x - z + 4 = 0 \\ y + 11 = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ ax + z + 2 = 0 \end{cases}$$

ha soluzione solo per $a = -9$. Per questo valore il sistema ha una sola soluzione, quindi le rette sono incidenti.Per controllare se esistono valori per cui le rette sono parallele, scriviamo le rette in forma parametrica: si ha $r_1 : X = (1,0,1)t + (-4,-11,0)$ e $r_2 : X = (1, 2a-2, -a)t + (0,4,-2)$. Dato che non esistono valori di a tali che $(1, 2a-2, -a) = (1,0,1)$, per ogni valore diverso da -9 le rette sono sghembe.