Istituzioni di Matematica- IV Prova Intermedia
28 Maggio 2009
Correzione

Esercizio 1. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, studiare la diagonalizzabilita' della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -a \end{pmatrix}$$

Soluzione. Gli autovalori della matrice sono $t_1 = 1, t_2 = a, t_3 = -a$. Quindi:

1) se $a \neq 1 \wedge a \neq -1 \wedge a \neq 0$ la matrice ha tre autovalori reali e distinti e quindi e' diagonalizzabile
2) se $a = 1$ gli autovalori sono $t_1 = t_2 = 1, t_3 = -1$. Poiche'

$$rank(A - I) = rank\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

la matrice non e' diagonalizzabile.

3) se $a = -1$ gli autovalori sono $t_1 = -1, t_2 = t_3 = 1$. Poiche'

$$rank(A - I) = rank\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

la matrice non e' diagonalizzabile.

4) se $a = 0$ gli autovalori sono $t_1 = 1, t_2 = t_3 = 0$. Poiche'

$$rank(A) = rank\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

la matrice e' diagonalizzabile.

Esercizio 2. Calcolare $\int_0^1 \log(\frac{1}{x} - 1)\,dx$.

Soluzione. Si tratta di un integrale improprio. Integrando per parti si ottiene che le primitivedella funzione integranda sono: $F(x) = x\log(\frac{1}{x} - 1) - \log(1 - x) + c.$

Poiche' $\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 1} F(x) = 0$ si ha che $\int_0^1 \log(\frac{1}{x} - 1)\,dx = 0$

Esercizio 3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (1+x^2)\,y' = sen(x)\sqrt{1+x^2} - xy \\ y(0)=0 \end{cases}$$

Soluzione. E' un'equazione lineare che possiamo riscrivere come:

$$y' = \frac{-xy}{1+x^2} + \frac{sen(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

Le soluzioni sono quindi date da : $y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\,dx$ con $A(x) = \int \frac{-x}{1+x^2}\,dx = -\log(\sqrt{1+x^2})$ e $b(x) = \frac{sen(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. Quindi otteniamo $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(-\cos(x)+C)$. Imponendo le condizioni iniziali si ha che la soluzione cercata e' $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(-\cos(x)+1)$.

Esercizio 4. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando la regione delimitata dalla funzione $f(x) = sen(x)$ e dalle rette $y=0$ e $x=\pi$ attorno :

a) all'asse delle ascisse;
b) all'asse delle ordinate.

Soluzione.

a) $V = \pi \int_0^{\pi} sen^2(x)\,dx = \frac{\pi^2}{2}$ b) $V = 2\pi \int_0^{\pi} x\, sen(x)\,dx = 2\pi^2$.

Esercizio 5. Trovare le soluzioni dell'equazione di Bernoulli:

$$-xy' + 2x\,y^2 \log x - y = 0$$

Soluzione. Intanto osserviamo che $y=0$ e' una soluzione. Dividendo per xy^2 otteniamo: $-\frac{y'}{y^2} = -2\log x + \frac{1}{x}$. Ponendo $z = \frac{1}{y}$, dato che $z' = \frac{-y'}{y}$ si ottiene l'equazione lineare $z' = \frac{1}{x} z - 2\log(x)$ le cui soluzioni sono:

$z(x) = x(-\log^2(x)+c)$. Da cui $y(x) = \frac{-1}{x(\log^2(x)+c)}$.