Istituzioni di Matematica
9 Gennaio 2003

Esercizio 1. Sia $f(x) = 2 + x^2 + \log(2x+2)$

a. Determinare il dominio di definizione
b. Su quali intervalli la funzione e' crescente?
c. Su quali intervalli e' concava?
d. Trovare le coordinate di massimi e minimi locali.
e. Disegnare il grafico di f .

Esercizio 2. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 e^{x-3}}{6} & x \geq 3 \\ \dfrac{5x}{x^2+1} + a(x-3) & x < 3 \end{cases}$$

e' continua e per quali e' derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Calcolare l' integrale $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1}\,dx$.

Esercizio 4. Sia f una funzione tale che:
i) f' è continua $\forall x \in \mathbb{R}$;
ii) f è costante $\forall x < 0$;
iii) $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$.
Provare che:
a) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $f'(a) = 1$.
b) $\forall k,\ 0 < k \leq 1/2$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f''(c) = k$

Esercizio 5. Date le funzioni :

i) $f(x) = \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{-2x}}$,

ii) $g(x) = 1 + \mathrm{arctg}(\log(1+3x))$,

iii) $h(x) = \mathrm{sen}(kx) + \mathrm{arcsen}(kx)$,

a) Provare che le tangenti ai grafici di f e g in $x=0$ sono parallele,
b) Trovare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le tangenti ai grafici f e h in $x=0$ sono perpendicolari.

Esercizio 6. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \mathrm{tg}\,x\ y + \cos x$.

Istituzioni di Matematica
9 Gennaio 2003

Esercizio 1. Sia $f(x)=\log(4+x)+2x^2$

a. Determinare il dominio di definizione
b. Su quali intervalli la funzione e' crescente?
c. Su quali intervalli e' concava?
d. Trovare le coordinate di massimi e minimi locali.
e. Disegnare il grafico di f.

Esercizio 2. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2 e^{x-2}}{2} & x \geq 2 \\ \dfrac{5x}{x^2+1}+a(x-2) & x<2 \end{cases}$$

e' continua e per quali e' derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Calcolare l' integrale $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+x}-2}{\sqrt{2+x}+2}\,dx$.

Esercizio 4. Sia f una funzione tale che:
iv) f' è continua $\forall x \in \mathbb{R}$;
v) f è costante $\forall x<0$;
vi) $f(1)=1$ e $f(2)=2$.
Provare che:
a) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $f'(a)=1$.
b) $\forall k$, $0<k \leq 1/2$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f''(c)=k$

Esercizio 5. Date le funzioni :
i) $f(x)=1+\operatorname{arctg}(\log(1+12x))$,
ii) $g(x)=\dfrac{4e^{4x}}{1+e^{-4x}}$,
iii) $h(x)=\cos(kx)+\arccos(kx)$,
a) Provare che le tangenti ai grafici di f e g in $x=0$ sono parallele,
b) Trovare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le tangenti ai grafici g e h in $x=0$ sono perpendicolari.

Esercizio 6. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'=\dfrac{x}{1+x^2}y+x$.

Istituzioni di Matematica
9 Gennaio 2003

Esercizio 1. Sia $f(x)=1-x^2-\log(6-2x)$
a. Determinare il dominio di definizione
b. Su quali intervalli la funzione e' crescente?
c. Su quali intervalli e' concava?
d. Trovare le coordinate di massimi e minimi locali.
e. Disegnare il grafico di f .

Esercizio 2. Determinare per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2 e^{x-6}}{60} & x\geq 6 \\ \dfrac{4x}{x^2+4}+a(x-6) & x<6 \end{cases}$$

e' continua e per quali e' derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Calcolare l' integrale $\int \dfrac{\sqrt{1+x}-2}{\sqrt{1+x}+2}dx$.

Esercizio 4. Sia f una funzione tale che:
vii) f' è continua $\forall x\in\mathbb{R}$;
viii) f è costante $\forall x<0$;
ix) $f(1)=1$ e $f(2)=2$.
Provare che:
a) esiste $a\in\mathbb{R}$ tale che $f'(a)=1$.
b) $\forall k$, $0<k\leq 1/2$ esiste $c\in\mathbb{R}$ tale che $f''(c)=k$

Esercizio 5. Date le funzioni :
i) $f(x)=1+\log(\text{arcsen}(x)+1)$,
ii) $g(x)=\dfrac{1+e^x}{1+e^{-x}}$,
iii) $h(x)=\cos(kx)+\text{arcsen}(kx)$,
a) Provare che le tangenti ai grafici di f e g in $x=0$ sono parallele,
*b)*Trovare per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ le tangenti ai grafici g e h in $x=0$ sono perpendicolari.

Esercizio 6. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'=\text{tg}\,x\;\;y+\cos x$.

Istituzioni di Matematica
9 Gennaio 2003

Esercizio 1. Sia $f(x)=x^2+\log(3-x)$

a. Determinare il dominio di definizione
b. Su quali intervalli la funzione e' crescente?
c. Su quali intervalli e' concava?
d. Trovare le coordinate di massimi e minimi locali.
e. Disegnare il grafico di f.

Esercizio 2. Determinare per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2e^{x-2}}{4} & x\geq 2 \\ \dfrac{15x}{x^2+1}+a(x-2) & x<2 \end{cases}$$

e' continua e per quali e' derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Calcolare l' integrale $\displaystyle\int \frac{\sqrt{5+x}-1}{\sqrt{5+x}+1}\,dx$.

Esercizio 4. Sia f una funzione tale che:

x) f' è continua $\forall x\in\mathbb{R}$;
xi) f è costante $\forall x<0$;
xii) $f(1)=1$ e $f(2)=2$.

Provare che:

a) esiste $a\in\mathbb{R}$ tale che $f'(a)=1$.
b) $\forall k,\ 0<k\leq 1/2$ esiste $c\in\mathbb{R}$ tale che $f''(c)=k$

Esercizio 5. Date le funzioni :

i) $f(x)=1+\text{arctg}(\log(1+12x))$,
ii) $g(x)=\dfrac{4e^{4x}}{1+e^{-4x}}$,
iii) $h(x)=\cos(kx)+\text{arctg}(kx)$,

a) Provare che le tangenti ai grafici di f e g in $x=0$ sono parallele,
*b)*Trovare per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ le tangenti ai grafici g e h in $x=0$ sono perpendicolari.

Esercizio 6. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'=\dfrac{x}{1+x^2}y+x$.