Istituzioni di Matematica
II Verifica Intermedia
15 Gennaio 2008

CORREZIONE

Esercizio 1. Provare che la funzione $f(x)=\text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ e' invertibile sul suo dominio di definizione. Trovare il dominio di f^{-1} e calcolare $D(f^{-1})(\pi/4)$.

Soluzione: Poiche' $1+x^2>0, \forall x\in\mathbb{R}$ si ha che la funzione f e' definita per $-1\leq\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leq 1$. Questa relazione puo' essere riscritta come $|x|\leq\sqrt{1+x^2}$ da cui si ottiene che la stessa e' valida $\forall x\in\mathbb{R}$.

Si ha che $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0, \forall x\in\mathbb{R}$ quindi la funzione e' strettamente crescente , e quindi invertibile, sul suo dominio di definizione. Poiche' $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}$, Im(f) = $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ e quindi $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ e' il domino della funzione inversa.

Poiche' $f(1)=\pi/4$ si ha che $D(f^{-1})(\pi/4)=\frac{1}{(Df)(1)}=2$.

Esercizio 2. Data la funzione $f(x)=\frac{\log^3(|x|)}{x^2}$

a) Determinare il dominio di esistenza di f
b) Su quali intervalli la funzione e' crescente e su quali decrescente?
c) Trovare le coordinate di massimi e minimi locali e flessi.
d) Su quali intervalli e' concava?
e) Disegnare il grafico di *f*.
f) Trovare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x=e$.

Soluzione: La funzione e' definita per ogni $x \neq 0$ inoltre e' una funzione pari quindi basta studiarla per $x > 0$.

Si ha che $f'(x) = \frac{\log^2(x)}{x^3}(3 - 2\log(x))$.

La derivata si annulla per $x = 1$ e per $x = \sqrt{e^3}$,e' positiva (e quindi *f* e' crescente) per $0 < x < \sqrt{e^3}$ e negativa (e quindi *f* e' decrescente) per $\sqrt{e^3} < x$.

La funzione *f* ha un massimo per $x = \sqrt{e^3}$ e vale $f(\sqrt{e^3}) = (3/2e)^3$. Poiche' $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ si tratta di un massimo assoluto. Non ci sono minimi.

$f''(x) = \frac{3\log(x)}{x^4}(2\log^2(x) - 5\log(x) + 2)$ quindi la derivata seconda si annulla per $x = 1$ per $x = \sqrt{e}$ e per $x = e^2$, che sono quindi punti di flesso , in $x = 1$ c'e un flesso a tangente orizzontale .

La funzione e' convessa per $1 < x < \sqrt{e}$ e per $x > e^2$, concava per $0 < x < 1$ e per $\sqrt{e} < x < e^2$

Ci sono due asintoti: uno verticale (l'asse delle *y*) e uno orizzontale l'asse delle *x*.

Ricordando che la funzione e' pari, queste informazioni valgono in modo simmetrico per $x < 0$ e il grafico puo' essere disegnato con le informazioni ottenute.

L'equazione della retta tangente al grafico di *f* nel punto di ascissa *x*=*e* e' data da $y = f(e) + f'(e)(x - e) = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3}(x - e) = \frac{x}{e^3}$.

Esercizio 3. Calcolare le primitive della funzione $f(x) = \frac{e^x - 3}{9 - e^{2x}}$.

Soluzione: $\int f(x)\,dx = -\int \frac{dx}{3+e^x}$. Con la sostituzione $t=e^x$ si ottiene

$$-\int \frac{dx}{3+e^x} = -\int \frac{dt}{t(t+3)} = -\int \frac{1/3}{t}\,dt + \int \frac{1/3}{t+3}\,dt$$

da cui si ha:

$$\int f(x)\,dx = \frac{\log(e^x+3)-x}{3} + c \quad .$$

Esercizio 4. Calcolare l'area della parte di piano delimitata da $y=x^2-1, y=0, x=0$ e $x=2$.

Soluzione: L'area richiesta e' uguale a

$$\int_0^2 |f(x)|\,dx = \int_0^1 -(x^2-1)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx = 2$$

Esercizio 5. Calcolare il determinante della matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **.**

Quante soluzioni ha il sistema $AX=b$ **,** $b \in \mathbb{R}^3$? Perche'?

Soluzione: $\det(A) = -4$, quindi la matrice A e' invertibile e $\forall b \in \mathbb{R}^3$ il sistema $AX=b$ ha un'unica soluzione.

Esercizio 6. Calcolare, quando possibile: sen(arcsen(3)), arcsen(sen(3)), sen(arcsen(1/3)), arcsen(sen(1/3)).

Soluzione: Ricordando che $\text{arcsen}: [-1,1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ si ottiene che:
1)non e' possibile calcolare sen(arcsen(3)) ,
2) poiche' $3 > \pi/2$ e $\text{sen}(3) = \text{sen}(\pi-3)$ arcsen(sen(3))=(π -3),
3)sen(arcsen(1/3))=1/3**,**
4)arcsen(sen(1/3))=1/3.