Istituzioni di Matematica- III Prova Intermedia
30 Aprile 2009

Esercizio 1. Determinare massimi, minimi della funzione $f(x)=\sqrt{|2-x|}$ relativamente all'intervallo [1,3]. La funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle? (Giustificare le risposte).

Soluzione. La funzione e' definita e continua in [1,3].
Derivando la funzione si ottiene $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{|2-x|}}\frac{|2-x|}{2-x}$ da cui si ricava che la funzione non e' derivabile per $x=2$, dove pero' la funzione (valendo 0) ha un punto di minimo assoluto. Tale punto e' l' unico punto di minimo. Ci sono due punti di massimo agli estremi dove la funzione vale 1.
La funzione e' continua in [1,3] ma non e' derivabile in (1,3), quindi anche se $f(1)=f(3)=1$ non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.

Esercizio 2. Calcolare il valore medio della funzione $f(x)=sen(\log(x))$ nell'intervallo [$e^{-\pi/4}, e^{\pi/4}$].

Soluzione. La funzione e' continua in [$e^{-\pi/4}, e^{\pi/4}$] quindi il valore medio e' dato da $v_m(f)=\frac{1}{e^{\pi/4}-e^{-\pi/4}}\int_{e^{-\pi/4}}^{e^{\pi/4}} f(x)dx=\frac{\sqrt{2}}{2(e^{\pi/2}-1)}$.

Esercizio 3. Calcolare l'area della regione sottesa dal grafico della funzione $f(x)=\frac{\log(x)-1}{x(1+\log^2(x))}$ e delimitata dalle rette $x=1$ e $x=e^2$.

Soluzione. Con la sostituzione $\log x=t$ si ottiene che una primitiva di f e' data da

$$G(x)=\frac{\log(1+\log^2(x))}{2}-arctg(\log(x)) \ .$$

Poiche' $f(x)\leq 0$ per $1\leq x\leq e$ e $f(x)\geq 0$ per $e\leq x\leq e^2$ l'area cercata e' data da $A=-\int_1^e f(x)dx+\int_e^{e^2} f(x)dx=G(e^2)-2G(e)+G(1)$ e quindi e' uguale a

$$\log(\frac{\sqrt{5}}{2})-arctg(2)+\pi/2$$

Esercizio 4. Risolvere il sistema al variare dei parametri $a, b\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+az=2 \\ -5x-y+az=1 \\ 3x+ay=3b \end{cases}$$

Soluzione. Riducendo a scalini o calcolando il determinante della matrice dei coefficienti si ottiene che il sistema ha una sola soluzione, per ogni valore di $b \in \mathbb{R}$ quando $a \neq 0$ e $a \neq \frac{1}{2}$ data da : $\left(\frac{a-3b}{6a-3}, \frac{6b-1}{2a-1}, \frac{3b+11a-6}{6a^2-3a}\right.$.

Quando $a=0$ esistono soluzioni solo per $b=2$.
Si ha $(x,y,z)=(2,-11,0)+t(0,0,1$ con $t \in \mathbb{R}$.
Se $a=\frac{1}{2}$: esistono soluzioni solo per $b=\frac{1}{6}$ e si ha

$(x,y,z)=(2,-11,1)+t\left(\frac{-1}{2},3,1\right.$ con $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Provare che la funzione $F(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^3}\,dt$ e' invertibile sul suo dominio di definizione e calcolare $(F^{-1})'(0)$.

Soluzione. La funzione $\sqrt{1+x^3}$ e' continua per $x \geq -1$ quindi $F(x)$ che e' una sua primitiva e' derivabile per $x \geq -1$. Poiche' $F'(x)=f(x) \geq 0$ la funzione $F(x)$ e'' continua e monotona e quindi invertibile. Si ha $F(1)=0$ $F'(1)=\sqrt{2} \neq 0$ quindi F^{-1} e' derivabile per $x=0$ e si ha

$$(F^{-1})'(0)=\frac{1}{F'(F(1))}=\frac{1}{\sqrt{2}} .$$