Istituzioni di Matematiche -Esercizi
Aritmetica

1. Indichiamo con *(a,b)* il massimo comun divisore fra due numeri interi *a* e *b*. Provare che
   i) $(a,a+1)=1$; ii) $(a,a+2)=1$ se a e' un numero dispari; iii) $(a,a+3)=1$ se a non e' divisibile per 3.

2. Provare che se n e' un numero intero non multiplo di 3 allora $(n+1)^3-1$ e' multiplo di 9.

3. Per quali valori interi di n il numero $5n^3+n^2+n+6$ e' divisibile per n ?

4. Dimostrare che se l'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ ha una soluzione intera x_0 allora x_0 divide c.

5. Provare che n e' divisibile per 11 se e solo se la somma delle sue cifre prese con segno alternato e' divisibile per 11. Trovare un criterio di divisibilita' per 3, per 7 e per 9.

6. Siano f e $g \in \mathbb{R}[x]$ due funzioni polinomiali . Dimostrare che le due funzioni coincidono se e solo se $f=g$.

7. Provare che se α_1 e α_2 sono le radici dell'equazione $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, allora $\alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{b}{a}$ e $\alpha_1\alpha_2=\dfrac{c}{a}$.

8. Determinare quoziente e resto della divisione del polinomio $f(x)=ix^4-2x^3+2$ per il polinomio $g(x)=x+i$.

9. Sia $A=\{n\in\mathbb{Z} \mid \text{n e' multiplo di 8}\}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:;

a) $x\in A$ => $(\forall h\in\mathbb{Z}\, x=8h)$ b) $x\in A$ => $(\exists h\in\mathbb{Z}: x=4h)$
c) $x\in A$ =>$(\exists h\in\mathbb{Z}: x=8h)$ d) $x\in A$ => $(\exists h\in\mathbb{Z}: x=16h)$
e) $(\exists h\in\mathbb{Z}: x=4h)$ => $x\in A$ f) $(\exists h\in\mathbb{Z}: x=16h)$ => $x\in A$

10. Fra le implicazioni dell'esercizio precedente qualcuna esprime il fatto che
a) condizione necessaria affinche' un numero sia multiplo di 8 e' che sia multiplo di 4?
b) condizione sufficiente affinche' un numero sia multplo di 8 e' che sia multiplo di 16?

11. Quale delle seguenti espressioni significa : ``ogni numero intero e' multiplo di 7''? Quale invece significa ``non e' vero che ogni numero intero e' multiplo di 7''?;

a) $\exists a\in\mathbb{Z},\exists b\in\mathbb{Z}: a=7b$ i) $\exists a\in\mathbb{Z},\exists b\in\mathbb{Z}: a\neq 7b$
b) $\exists a\in\mathbb{Z}:\forall b\in\mathbb{Z}: a=7b$ l) $\exists a\in\mathbb{Z}:\forall b\in\mathbb{Z}: a\neq 7b$
c) $\forall a\in\mathbb{Z},\exists b\in\mathbb{Z}: a=7b$ m) $\forall a\in\mathbb{Z},\exists b\in\mathbb{Z}: a\neq 7b$
d) $\forall a\in\mathbb{Z},\forall b\in\mathbb{Z}: a=7b$ n) $\forall a\in\mathbb{Z},\forall b\in\mathbb{Z}: a\neq 7b$
e) $\exists b\in\mathbb{Z},\exists a\in\mathbb{Z}: a=7b$ o) $\exists b\in\mathbb{Z},\exists a\in\mathbb{Z}: a\neq 7b$
f) $\exists b\in\mathbb{Z}:\forall a\in\mathbb{Z}: a=7b$ p) $\exists b\in\mathbb{Z}:\forall a\in\mathbb{Z}: a\neq 7b$
g) $\forall b\in\mathbb{Z},\exists a\in\mathbb{Z}: a=7b$ q) $\forall b\in\mathbb{Z},\exists a\in\mathbb{Z}: a\neq 7b$
h) $\forall b\in\mathbb{Z};\forall a\in\mathbb{Z}: a=7b$ r) $\forall b\in\mathbb{Z}:\forall a\in\mathbb{Z}: a\neq 7b$

12. Dire quali delle affermazioni dell'esercizio precedente sono vere e quali

false. Per ognuna delle espressioni a)..)h dire quale fra le espressioni i)..r)
rappresenta la sua negazione.

13.Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $(a, b)=4$. Dire quali sono i possibili valori che puo' assumere (a^2, b^3) .

14. Dati $m, n \in \mathbb{Z}$, diversi da zero sia $A=\{xm+yn \ : \ x, y \in \mathbb{Z}\}$ provare che il massimo comun divisore (m, n) e' il minimo intero positivo di A .

15. Considerare al variare di $t \in \mathbb{Z}$ l'equazione $tx+(t+2)y=7(*)$. Si vuole dimostrare che essa ha soluzioni $x, y \in \mathbb{Z}$ se e solo se t e' dispari. A tale scopo quale (o quali) delle seguenti affermazioni occorre dimostrare? (NB. Alcune possono essere fra loro equivalenti)

a) $\forall t \in \mathbb{Z}, t$ dispari => (*) ha soluzioni intere
b) $\exists t \in \mathbb{Z}, t$ dispari, tale che (*) ha soluzioni intere
c) $\forall t \in \mathbb{Z}, t$ pari tale che (*) non ha soluzioni intere
d) $\forall t \in \mathbb{Z}, t$ pari => (*) non ha soluzioni intere
e) (*) ha soluzioni intere => t e' dispari
f) (*) non ha soluzioni intere => t e' pari

16.Dimostrare che l'equazione $tx+(t+2)y=7$ ha soluzioni intere se e solo se t e' dispari.

17. Sia p un numero primo , per quali valori di $c \in \mathbb{Z}$ l'equazione $x^2+cx+p=0$ ha soluzioni intere?

18. Supponiamo di avere due clessidre una da 6 minuti e una da 11 minuti.
Come si possono misurare 13 minuti?

19. L'equazione $x^2+y^2-6x-8y+9=($ e' l'equazione di una circonferenza? Se si quale?

20.Dimostrare che $3x^2+3y^2+4y=$ e' l'equazione di una circonferenza.Trovare centro e raggio.

21. Provare che il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo
e' lungo la meta' del terzo lato e ad esso parallelo.

22. Si considerino i punti di coordinate $F_1=(c,0)$ e $F_2+(-c,0)$, dove c e' un numero positivo.

i) Sia $a>c>0$, determinare l'equazione dell'insieme di punti P del piano tali che $d(P, F_1)+d(P, F_2)=2$;

ii) $c>a>0$, determinare l'equazione dell'insieme di punti P del piano tali che $|d(P, F_1)-d(P, F_2)|=2$.

23. Sia $F=(0, \frac{p}{2})$ e sia r la retta parallela all'asse x di equazione $y=-\frac{p}{2}$, dove $p>0$.
Determinare i punti P del piano tali che $d(P, F)=d(P,$.