

Istituzioni di Matematiche -Esercizi Foglio 1

1. Riconoscere e confrontare i seguenti sottoinsiemi della retta:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 3+1 < \frac{(x+7)}{3} \right\}, \quad E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2x - \frac{(6-3x)}{4} < 3+x \right\},$$
$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |1+|x+1|| \leq |1-|x-1|| \right\}, \quad D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < |x-3| \right\}.$$

2. Descrivere in termini di equazioni e disequazioni i seguenti insiemi:

- Il rettangolo (senza bordo) i cui vertici sono i punti $(-2,-1)$, $(-2,3)$, $(5,-1)$, $(5,3)$.
- il segmento aperto a sinistra di estremi $(-5,5)$, $(2,5)$.
- il semipiano chiuso sopra la retta orizzontale passante per $(0,3)$
- il primo il secondo, il terzo e il quarto quadrante
- il semipiano aperto a sinistra della retta verticale per $(7,0)$
- la regione compresa fra le rette verticali per $(-2,7)$ e $(5,7)$, incluse le rette.

3. Descrivere geometricamente i seguenti insiemi:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4 \wedge -2 \leq x < 0 \right\}, \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 1 \wedge y^2 > 3 \right\}$$

4. Descrivere in termini di equazioni e disequazioni i seguenti insiemi:

- la retta per $(5,-5)$ e $(-2,2)$
- il segmento chiuso di estremi $(5,-5)$ e $(-2,2)$
- la retta perpendicolare all'asse x per il punto $(-3, 0)$
- la retta per $(-1,1)$ parallela alla retta $x=y$
- il segmento della retta precedente contenuto nel primo quadrante
- il segmento di estremi $(1,3)$ e $(4,7)$.

5. Descrivere geometricamente i seguenti insiemi (eventualmente disegnandoli):

- $\{(x,y) \mid y=3x \text{ e } x < 2\}$, b) $\{(x,y) \mid x(x-1)(x-2)=0\}$, c) $\{(x,y) \mid xy=0\}$, d) $\{(x,y) \mid x^2 = y^2\}$
- $\{(x,y) \mid y > x\}$, f) $\{(x,y) \mid (y-x)(x-2)=0\}$.

6. Risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} -2x + y + 1 = 0 \\ 4x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 5y - 1 = 0 \\ -2x + y + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - y + 2 = 0 \\ 3x + 7y = 0 \end{cases}$$

7. Provare che $X \subseteq Y$ se e solo se $Y^c \subseteq X^c$

8. Determinare i sistemi di disequazioni i cui punti sono tutti e soli i punti dei triangoli seguenti:

- il triangolo di vertici $(0,1)$, $(1,0)$ e $(2,0)$
- il triangolo di vertici $(3,4)$, $(-3,1)$ e $(1,1)$
- il triangolo di vertici $(-2,4)$, $(0,0)$, $(1,1)$
- un triangolo rettangolo avente un vertice in $(0,1)$ e l'ipotenusa sulla retta $5x-3y+1=0$.

9. Rappresentare con un grafico le seguenti storie

- Avevo appena lasciato casa quando mi sono accorto di avere dimenticato i libri, così sono tornata indietro a prenderli.

- b) Tutto andava bene fino a quando ho bucato una gomma.
 c) Camminavo lentamente ma poi ho accelerato quando mi sono accorto di essere in ritardo

10. Generalmente la quantità di un raccolto aumenta se si usa più fertilizzante. Tuttavia se se ne usa troppo la produzione cala drasticamente: disegna un possibile grafico che descriva la quantità del raccolto in termini della quantità del fertilizzante usato.

11. Disegna il grafico delle seguenti funzioni:

- a) $y=x-5$, b) $-3x+4=y$ c) $5=y$, d) $y=-4x-5$, e) $y=x+6$, f) $2y=x$

12. Dati i seguenti (corrispondenti) valori di p e q esprimi:

p	1	2	3	4
q	950	900	850	800

- a) p come funzione lineare di q b) q come funzione lineare di p

13. Si è usata una equazione lineare per generare i valori della seguente tabella. Trova l'equazione:

x	5,2	5,3	5,4	5,5
y	27,8	29,2	30,6	32

14. Un aereo usa una quantità costante di carburante per il decollo, una (costante ma diversa) per l'atterraggio e un tanto al chilometro quando è in volo. In che misura la quantità di carburante necessaria dipende dalla lunghezza del viaggio? Scrivere una formula per la funzione. Spiega il significato delle costanti nella tua formula.

15. Considera il grafico della temperatura espressa in Fahrenheit, F , rispetto alla temperatura espressa in gradi Celsius, C . Sapendo che $212F$ e $100C$ rappresentano la temperatura di ebollizione dell'acqua mentre $32F$ e $0C$ la temperatura di congelamento, determina:

- a) l'equazione della retta ; b) quanti gradi Fahrenheit corrispondono a $20C$
 c) quale temperatura è la stessa in gradi F e gradi C .

16. Per piccole variazioni di temperatura la formula per la dilatazione di una sbarra di metallo è $l-l_0=al_0(t-t_0)$ dove l è la lunghezza della sbarra alla temperatura t , l_0 la lunghezza iniziale alla temperatura t_0 e a è una costante che dipende dal tipo di metallo.

- a) esprimi l come funzione lineare di t
 b) Supponendo di avere una sbarra lunga 100cm a 15 gradi, fatta di un metallo con $a=10^{-5}$, scrivi l'equazione che da la lunghezza a temperatura t .
 c) Che informazioni dà il segno del coefficiente angolare sull'espansione di un metallo sottoposto a una variazione di temperatura?

17. Sia $f(x)$ la temperatura quando la colonna di mercurio di un particolare termometro è lunga x millimetri. Cosa significa $f^{-1}(30)$?

18. Decidere quali delle seguenti funzioni sono invertibili:

- a) $f(d)$ è il numero totale di litri di carburante usati da un aereo alla fine di d minuti di un particolare volo.
 b) $f(t)$ è il numero di clienti presenti alla UPIM alle 16 e t minuti del 20 Dicembre 2000.

c) $f(x)$ e' il volume in litri di x chili di acqua a 40 gradi.

d) $f(n)$ e' il numero di studenti di chimica che hanno il compleanno nell' n -mo giorno dell'anno.

19. Scrivere una tabella per il valori di f^{-1} , dove f e' la funzione definita sotto. Il dominio di f e' dato dagli interi fra 1 e 7. Quale e' il dominio di f^{-1} ?

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	3	-7	19	4	178	2	1

20. Consideriamo i due sottoinsiemi dei numeri razionali $A = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$ e

$B = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$, provare che i due sottoinsiemi sono contigui e determinare il loro elemento di separazione.

21. Verificare che $f(x) = 3x-4$ e $g(x) = \frac{2}{5}x+1$ sono funzioni bigettive da \mathbb{R} a \mathbb{R} . Trovare le inverse.

22. Siano $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ due funzioni, definiamo $h(a) = g(f(a))$, provare che:

a) se h e' iniettiva anche f e' iniettiva

b) se h e' iniettiva e f e' surgettiva allora g e' iniettiva.

23. Verificare che i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} sono limitati:

a) $A = \{\frac{n-1}{n} | n \in \mathbb{N}_+\}$, b) $B = \{2\frac{n}{n^2+1} | n \in \mathbb{Z}\}$

24. Siano $f(x) = 3x^2-2$ e $g(x) = x+$, trovare:

a) $(f+g)(x)$, b) $(fg)(x)$, c) $f(g(x))$ e $g(f(x))$, d) il dominio di $(f/g)(x)$

25. Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $x^2-x+1 < 0$, b) $-9x^2+12x-4 \geq 0$, c) $x^4-5x^2 \geq 0$, d) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1 \leq 0$

e) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1 \geq 0$, f) $\frac{3x^2-x+7x+4}{x^4-2x^2-3} \leq 1$, g) $\frac{4|x|}{x^2-2|x|-3} < -1$,

h) $(x+1)^2 < |x^2-1|$, i) $\sqrt{3-2x^2} > 2x-1$, j) $\log(x-1) < -1$, k) $\log_{\frac{1}{12}}(x^2+4x) < -1$

l) $9^x > 3$, m) $(x+1)(x^2-1) > 1$

26. La semivita del radio-226 e' 1620 anni. Scrivere una formula per la quantita' Q di radio che rimane dopo t anni, sapendo che la quantita' iniziale e' Q_0 . Quale percentuale della quantita' iniziale resta dopo 500 anni?

27. All'inizio degli anni '60 a seguito degli esperimenti nucleari fu immesso nell'atmosfera dello stronzio-90 che si deposita' nelle ossa delle persone che vivevano a quel tempo. Se la semivita dello stronzio-90 e' di 29 anni, quale frazione dello stronzio assorbito nel 1960 rimane oggi nelle ossa delle persone?

28. Una certa regione ha una popolazione di 10 milioni di persone e una crescita annuale del 2%. Stimare il periodo di raddoppiamento.

29. In Brasile fra il dicembre del 1988 e il dicembre del 1989 l'inflazione

fu del 1290% (ossia i prezzi crebbero in un anno di un fattore $1+12,90 = 13,90$).

a) quale era il costo nel 1989 di un articolo che costava l'anno prima 1000 cruzeiros?

b) Quale era il tasso di inflazione mensile durante quel periodo?

30. Quale e' il tempo di raddoppiamento di prezzi che aumentano di un 5% l'anno?

31. Al momento attuale l'ozono presente nell'aria decade esponenzialmente ad un tasso annuale continuo dello 0.25%. Quale e' la semivita dell'ozono?

(Ossia a questo tasso in quanto tempo la quantita' di ozono presente si dimezzera'?).

32. La quantita' Q di carbonio-14 che rimane in un organismo t anni dopo la sua morte e' data dalla formula $Q=Q_0 e^{-0,000121t}$ dove Q_0 e' la quantita' iniziale:

a) se un reperto archeologico ha il 15% della quantita' originale di carbonio-14, determinare la sua eta'.

b) Dimostra come sia possibile calcolare da questa equazione il tempo di semi-vita del carbonio-14.

33. La datazione geologica delle rocce e' fatta usando potassio-40 invece che carbonio-14 perche' il potassio ha una semivita piu' lunga. La semi-vita del potassio-40 e' $1,28 \cdot 10^9$ anni. Trovare una formula che da' la quantita' P di potassio-40 rimanente in funzione del tempo in anni, assumendo una quantita' iniziale P_0 :

a) usando base $\frac{1}{2}$, b) usando base e .

34. Decidere se e' meglio una banca che paga un interesse annuo del 7% capitalizzato mensilmente o una che paga il 6.9% annuale capitalizzato giornalmente?

Calcolare il saldo dopo t anni per un investimento iniziale di 10 milioni.

35. Supponiamo di voler investire del denaro in modo da ottenere 12 milioni in 10 anni. Quanto deve essere investito se l'interesse e' del 9% annuo capitalizzato quadrimestralmente?

36. Sia $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

a) $f(x)$ e' crescente o decrescente?

b) provare che $f(x)$ e' invertibile e trovare il dominio e una formula per f^{-1}

c) tracciare i grafici di f e di f^{-1} .