Istituzioni di Matematiche -Esercizi
Induzione e combinatoria

1. Dimostrare usando il principio di induzione che :
a) $2^{n-1} \leq n! \quad \forall n>0$
b) $2^n+4^n \leq 5^n \quad \forall n>2$
c) $n^n \geq n! \quad \forall n>0$

2. Quante sono le diagonali di un poligono convesso con n lati?

3. In quanti modi si puo' dividere un insieme :
a) di 5 elementi in due insiemi uno di 2 e uno di 3 elementi?
b) di 4 elementi in due insiemi di due elementi ciascuno?
c) di 2n elementi in due insiemi di n elementi ciascuno?
d) di 3n elementi in tre insiemi di n elementi ciascuno?
22.Dati nel piano n punti (n >2) fra cui non ve ne siano 3 allineati, quante rette essi individuano?

4. Sia $A=\{1,2,3,4,5\}$ e $B=\{1,3,4\}$. Quante sono :
a) $f: A \rightarrow A$ tali che $f(1) \in B$ b) $f: A \rightarrow A$ iniettive tali che $f(1) \in B$
c) $f: A \rightarrow A$ surgettive tali che $f(1) \in B$ d) $f: A \rightarrow B$ iniettive
e) $f: A \rightarrow B$ surgettive

5..Sia $A=\{n \in \mathbb{Z} \mid n=2^\alpha 3^\beta 5^\gamma, \alpha+\beta+\gamma=6, \alpha, \beta, \gamma \geq 0\}$
a) Quanti sono gli elementi di A?
b) Quanti elementi di A sono quadrati perfetti?
c) Quanti elementi di A sono cubi perfetti?

6.Dati nel piano n punti (n >2) fra cui non ve ne siano 3 allineati, quante rette essi individuano?

7. Provare che se $\alpha \in \mathbb{R},\ 0<\alpha<1,\ n \in \mathbb{N}$ allora $(1-\alpha)^n \geq a-n\alpha$.

8. Provare che i) $\sum_{i=1}^n i^3=(\sum_{i=1}^n i)^2, \forall n \geq 1$. ii) $\sum_{i=1}^n (2i-1)=n^2, \forall n \geq 1$.

9. Provare che $\prod_{i=1}^n (2i)! \geq ((n+1)!)^n, \forall n \geq 1$.

10. Provare che $(\sum_{i=1}^n x_i)^2 \leq n(\sum_{i=1}^n x_i^2), \forall n \geq 1$ e per $x_i \in \mathbb{R}$.

11. Provare che $\sum_{i=1}^n i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \geq 1$.

12. Riconoscere le seguenti funzioni definite per ricorrenza:

i) $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(n)=f(n-1)+2n-1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(n)=2f(n-1) \end{cases}$ iii) $\begin{cases} f(0)=3 \\ f(n)=f(n-1)+n-1 \end{cases}$.