UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"Matematica III 00/01" + "Matematica 99/00" – Scritto del 27/01/01

Esercizio 1. Siano $A = \{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$ e $f \in \mathcal{H}(A)$.

(A) [3 punti] Si dimostri che $\int_{\partial\Delta_r} f(z)\,\mathrm{d}z$ non dipende da r, per $1 < r < 2$.

(B) [2 punti] Si dimostri che $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r} z^{-n-1} f(z)\,\mathrm{d}z$ non dipende da r, per $1 < r < 2$ e $n \in \mathbb{Z}$.

(C) [3 punti] Si dimostri che $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, specificando il tipo di convergenza della serie.

(D) [3 punti] Nel caso particolare $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ si calcoli a_n per ogni $n \in \mathbb{Z}$. [È lecito usare il punto precedente anche senza averlo dimostrato.]

(E) [4 punti] Se $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in A$, si può concludere che f si estende olomorficamente su $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 2\}$?

Esercizio 2. Per $k \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = 2x - x^2 \\ x(0) = k \end{cases}$ e si indichi con x_k la sua soluzione (definita sul più grande intervallo possibile).

(A) [4 punti] Si dimostri che tale soluzione esiste ed è unica (senza determinare l'intervallo di definizione), e se ne discuta la regolarità.

(B) [4 punti] Si provi che x_k è definita su $(-\infty, 0]$ per $k \leq 2$, e si calcoli $\lim_{t\to-\infty} x_k(t)$ al variare di $k \leq 2$.

(C) [3 punti] Si determinino i valori di k per i quali la x_k è limitata sul suo insieme di definizione.

(D) [4 punti] Si determinino i valori di k per i quali la x_k è definita su tutto $\mathbb{R}$. [Suggerimento: quando la x_k non è limitata, si stimi x_k' e si maggiori o minori x_k con una soluzione non definita su tutto $\mathbb{R}$ di un'altra equazione differenziale.]

Esercizio 3. Siano $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$, $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 4, \ z \neq 2, z \neq -2\}$.

(A) [3 punti] Si dica se su Δ esista una forma del tipo $f(z)\,\mathrm{d}z$ che sia chiusa ma non esatta. Si faccia lo stesso su Δ^*.

(B) [3 punti] Si dimostri che non può esistere una bigezione olomorfa $\Delta \to \Delta^*$ con inversa olomorfa.

(C) [3 punti] Siano α_1 e α_2 curve semplici e chiuse in Δ^*, tra loro disgiunte. Sia ω una forma chiusa su Δ^* tale che $\int_{\alpha_1} \omega \neq 0$ e $\int_{\alpha_2} \omega = 0$. Si provi che α_2 è il bordo di un aperto che non contiene 0.

(D) [3 punti] Si descrivano forme chiuse ω_1 e ω_2 su Ω (a coefficienti complessi) e curve chiuse β_1 e β_2 in Ω tra loro disgiunte, tali che $\int_{\beta_i} \omega_j = \delta_j^i$. [Suggerimento: si determinino dapprima ω_1 e ω_2 a meno di una costante di normalizzazione.]

(E) [3 punti] Si dimostri che non può esistere una bigezione olomorfa $\Delta^* \to \Omega$ con inversa olomorfa.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata.
Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.