Esercizî di Geometria (Petronio 09/10)

25 maggio 2010

Esercizio 1. Provare che due rette proiettive distinte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ hanno sempre esattamente un punto di intersezione e interpretare geometricamente il risultato con riferimento alla posizione reciproca di due rette affini in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. Determinare l'intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ degli insiemi

$$\{[t-1 : t^2-4 : -t] :\ t \in \mathbb{R}\},$$

$$\{[1-3t^2 : 1+t : 1+3t^2] :\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 3. Determinare i punti all'infinito dell'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ \left(x_1+x_2-(x_1+x_2)^2\right)\cdot(x_1x_2+1)\cdot\left(x_1-\sqrt{\pi}\right)\cdot\left(x_1^2+17x_2\right)\right\}.$$

Esercizio 4. Determinare il tipo affine della quadrica Q di equazione $x_1^2+2x_1x_2+x_3^2+2x_2=1$. Identificato $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con l'insieme dei punti all'infinito di $\mathbb{R}^3$, individuare l'intersezione di $\{[3-t : 2t-5 : 2t-3] :\ t \in \mathbb{R}\}$ con l'insieme dei punti all'infinito di Q.

Esercizio 5. Sia $\ell \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ una retta proiettiva. Provare che esistono $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tali che la funzione $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \ell$ data da

$$f([t_0 : t_1]) = [t_0v_0 + t_1v_1]$$

è ben definita ed è una bigezione tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e ℓ.