Esercizî di Geometria (Petronio 10/11)

16 marzo 2011

Esercizio 1. Provare che se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ allora

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_{n-1}^2 & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

(determinante di Vandermonde).
Dedurne che dati nel piano cartesiano n punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ con ascisse distinte esiste uno e un solo polinomio di grado $n - 1$ il cui grafico contiene i punti assegnati (**interpolazione polinomiale**).

Esercizio 2. Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e una forma bilineare simmetrica $f : V \times V \to \mathbb{R}$, considerare la forma quadratica associata $q : V \to \mathbb{R}$ data da $q(v) = f(v, v)$. Conoscendo q determinare f:

(a) $V = \mathbb{R}^2, \quad q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$

(b) $V = \mathbb{R}^3, \quad q(x) = -2x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 - x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_3$

(c) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad q(A) = \det(A)$

(d) $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad q(A) = \sum_{j=1}^{3} (A^2)_{j,3-j}$

(e) $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t], \quad q(p(t)) = p(1) \cdot p(-2)$

Esercizio 3. Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e una forma bilineare simmetrica $f : V \times V \to \mathbb{R}$, stabilire se f sia un prodotto scalare:

(a) $V = \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \langle x|y\rangle_A \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $V = \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = \langle x|y\rangle_A \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{\pi} & -1 \\ -\sqrt{\pi} & -\sqrt[3]{17} & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

(c) $V = \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = \langle x|y\rangle_A \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $V = \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = \langle x|y\rangle_A \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $V = \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = \langle x|y\rangle_A \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

(f) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad f(A, B) = \sum_{i,j=1}^{2} (1 + (-2)^{i+j})(AB)_{ij}$

(g) $V = \mathbb{R}_{\leq 2}(t), \quad f(p(t), q(t)) = p(1) \cdot q'(-1) + q(1) \cdot p'(-1)$

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale reale V con il prodotto scalare $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ indicato ortonormalizzare il sistema di vettori assegnato:

(a) $V = \mathbb{R}^2, \quad \langle\,.\,|\,.\,\rangle = \langle\,.\,|\,.\,\rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $V = \mathbb{R}^2, \quad \langle\,.\,|\,.\,\rangle = \langle\,.\,|\,.\,\rangle_A \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $V=\mathbb{R}^3, \quad \langle\,.\,|\,.\,\rangle = \langle\,.\,|\,.\,\rangle_{\mathbb{R}^3},$

$$v_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}\pi\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

(d) $V=\mathbb{R}^3, \quad \langle\,.\,|\,.\,\rangle = \langle\,.\,|\,.\,\rangle_A \quad \text{con} \quad A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&3&-3\\1&-3&4\end{pmatrix},$

$$v_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

(e) $V=\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}), \quad \langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A\cdot B),$

$$A_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}-1&5\\1&2\end{pmatrix}$$

(f) $V=\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}), \quad \langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A\cdot M\cdot B) \quad \text{con} \quad M=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\end{pmatrix},$

$$A_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}-1&5\\1&2\end{pmatrix}$$

(g) $V=\mathbb{R}[t], \quad \langle p(t)|q(t)\rangle = \int_0^1 p(s)q(s)\,\mathrm{d}s,$

$p_1(t)=1+2t-t^2,\ p_2(t)=2-t+3t^2$