UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 6/7/13 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Stabilire per quali $t \in \mathbb{Q}$ il numero $\left(1 + t - 5\sqrt{3}\right)^2 + \left(3t - 1 + 2\sqrt{3}\right)^2$ è razionale.

2. Trovare $v \in \mathbb{R}^2$ sapendo che $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ con $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \right)$.

3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} t & 4 & 2 \\ t-2 & 2 & t-3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} < 3$.

4. Se V e W hanno dimensione finita ed esiste $f : V \to W$ lineare iniettiva non surgettiva, può esistere $g : V \to W$ lineare surgettiva? Se sì fare un esempio, se no spiegare perché.

5. Risolvere $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 4 \\ 3x + y + 2z = -5 \\ 4x + 7y + z = -6. \end{cases}$

6. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare con $f\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$, calcolare $f^{-1}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$.

7. Dati $V = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ e $W = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}$ calcolare la proiezione su V di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{C}^2 = V \oplus W$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 6/7/13 — Esercizî

1. Considerare $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 7 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ e $X = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0\}$.

(A) (3 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : X \to X$.

(B) (3 punti) Elencare gli elementi di X aventi due componenti nulle e le altre due intere prime tra loro, in modo che l'ultima non nulla sia positiva; disporre questi vettori in modo che sia non decrescente la seconda componente e, a parità di seconda componente, che sia crescente la quarta.

(C) (3 punti) Estrarre dai precedenti vettori ordinati una base $\mathcal{B}$ di X.

(D) (3 punti) Determinare la prima colonna di $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazî affini

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad F : \begin{cases} x - 4y + z + w = 1 \\ 3x + 5y + 2z - w = 22. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di E.

(B) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di F.

(C) (3 punti) Provare che E ed F sono disgiunti e non paralleli tra loro.

(D) (3 punti) Dedurre dal punto precedente che $E + F = \mathbb{R}^4$.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $t = 7$

2. $\begin{pmatrix} -7 \\ -19 \end{pmatrix}$

3. $t = 3$ o $t = 4$

4. No, perché $\dim(V) < \dim(W)$

5. $x = -4,\ y = 1,\ z = 3$

6. $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -i \\ 1-i \end{pmatrix}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) Se $\omega = (4, -2, 6, 3)$ si ha $\omega \cdot A = -\omega$

(B) $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(C) Tenere primo, secondo e quarto vettore

(D) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -21 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\begin{cases} 5x - 11y + 2z = 3 \\ -16y + 2z + 5w = 8 \end{cases}$

(B) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}\right)$

(C) Le giaciture si incontrano nella retta generata dal vettore $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$

(D) $E + F$ ha dimensione $1 + (2 + 2 - 1) = 4$