



1. Stabilire per quali $t \in \mathbb{Q}$ il numero $(1 + 2t - 5\sqrt{2})^2 + (t - 3 + 9\sqrt{2})^2$ è razionale.
2. Trovare $v \in \mathbb{R}^2$ sapendo che $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ con $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \right)$.
3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\text{rank} \begin{pmatrix} 3 & 2-t & 2 \\ 2t+5 & 2 & t+2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} < 3$.
4. Se V e W hanno dimensione finita ed esiste $f : V \rightarrow W$ lineare surgettiva non iniettiva, può esistere $g : V \rightarrow W$ lineare iniettiva? Se sì fare un esempio, se no spiegare perché.
5. Risolvere
$$\begin{cases} -2x + 5y + z = 2 \\ 3x - 2y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = 7. \end{cases}$$
6. Data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare con $f \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $f \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$, calcolare $f^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.
7. Dati $Z = \text{Span} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ e $W = \text{Span} \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix}$ calcolare la proiezione su Z di $\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{C}^2 = Z \oplus W$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.



1. Considerare $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0\}$.

- (A) (3 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : X \rightarrow X$.
- (B) (3 punti) Elencare gli elementi di X aventi due componenti nulle e le altre due intere prime tra loro, in modo che l'ultima non nulla sia positiva; disporre questi vettori in modo che sia non decrescente la quarta componente e, a parità di quarta componente, che sia crescente la terza.
- (C) (3 punti) Estrarre dai precedenti vettori ordinati una base \mathcal{B} di X .
- (D) (3 punti) Determinare la prima colonna di $[f]_{\mathcal{B}}$.

2. In \mathbb{R}^4 considerare i sottospazi affini

$$E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad F : \begin{cases} x + 4y + z + w = 1 \\ x + 5y - 2z - 3w = -20. \end{cases}$$

- (A) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di E .
- (B) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di F .
- (C) (3 punti) Provare che E ed F sono disgiunti e non paralleli tra loro.
- (D) (3 punti) Dedurre dal punto precedente che $E + F = \mathbb{R}^4$.



Risposte

5. ♥

1. $t = -32$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $t = -2$ o $t = \frac{3}{2}$

4. No, perché $\dim(V) > \dim(W)$

5. $x = -2, y = -1, z = 3$

6. $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1-i \\ -i \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



Soluzioni

1.

(A) Se $\omega = (6, 4, 3, -2)$ si ha $\omega \cdot A = -\omega$

$$(B) \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(C) Tenere primo, secondo e quarto vettore

$$(D) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 21 \end{pmatrix}$$

2.

$$(A) \begin{cases} 5x + 16y + 2z = 27 \\ 11y + 2z + 5w = 7 \end{cases}$$

$$(B) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -17 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(C) Le giaciture si incontrano nella retta generata dal vettore $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ (D) $E + F$ ha dimensione $1 + (2 + 2 - 1) = 4$