UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 18/7/13 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^6 :\ 4x_2 - 9x_3 + 2x_5 = 0\}$,
$f : \mathbb{R}^3 \to X$ è lineare iniettiva e $X = Y \oplus \mathrm{Im}(f)$, che dimensione ha Y?

2. Data la base $\mathcal{B} = (6e_1 + 2e_2 + 5e_3,\ 4e_1 + 1e_2 + 4e_3)$ di $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0\}$, provare che $v = 8e_1 + 1e_2 + 10e_3$ appartiene a X e trovare $[v]_{\mathcal{B}}$.

3. Sapendo che due sottospazî di $\mathbb{C}^9$ hanno dimensioni rispettivamente 5 e 6,
e che la loro somma **non** è $\mathbb{C}^9$, dire che dimensione può avere la loro intersezione.

4. Risolvere $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 6 \\ 3x + 4y - 2z = 8 \\ x - 27y + 31z = 6. \end{cases}$

5. Calcolare $\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$

6. Quante sono le orlate di una sottomatrice 5×5 in una matrice 10×7?

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(3e_1 + 2e_2 + 2e_3)$
calcolare la proiezione su X di $5e_1 + 3e_2 + e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 18/7/13 — Esercizî

1. Considerare i seguenti sottospazî U e V di $\mathbb{R}^4$ e la seguente matrice A

$$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad V : \begin{cases} 2x - 6y - 5z - w = 0 \\ -3x + 4y + 4z + w = 0, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -9 & -13 \\ 1 & 3 & -17 & -23 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

(A) (1 punto) Provare che i vettori assegnati come generatori di U ne costituiscono una base $\mathcal{B}$.

(B) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di U.

(C) (3 punti) Trovare una base di V del tipo $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ 3 \\ w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ -3 \\ z_2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, dove y_1, w_1, x_2, z_2 sono numeri opportuni (da trovare).

(D) (2 punti) Provare che l'espressione $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : U \to V$.

(E) (3 punti) Trovare $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

2. Considerare i seguenti vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

(A) (4 punti) Provare che esiste una e una sola applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(v_j) = w_j$ per $j = 1, 2, 3$.

(B) (4 punti) Calcolare le dimensioni di immagine e nucleo di f.

(C) (4 punti) Estrarre da $(w_1, w_2, w_3, e_1, e_2, e_3, e_4)$ una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$; detto U il generato dei primi due elementi di $\mathcal{B}$ e V il generato degli ultimi due, trovare la proiezione su U di $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Risposte

5. ♡

1. 2

2. $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

3. Tra 3 e 5

4. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -14 \\ 19 \\ 17 \end{pmatrix}$

5. 9

6. 10

7. $14e_1 + 9e_2 + 7e_3$

---

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) Sono linearmente indipendenti

(B) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -y + 4z + 5w = 0 \end{cases}$

(C) $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

(D) Moltiplicando per A gli elementi di $\mathcal{B}$ si trovano vettori che soddisfano le equazioni di V

(E) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\det(v_1, v_2, v_3) = 21$

(B) $\mathrm{rank}(w_1, w_2, w_3) = 2$, dunque $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ e $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$

(C) $\mathcal{B} = (w_1, w_2, e_1, e_2)$; $\quad \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$