UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 6/7/13 — Quesiti

Nome ______ **Cognome** ______ **Matricola** ______

1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con $\mathrm{tr}(A) = 10$ e $\det(A) = -4$,
sapendo che un autovalore di A è $\lambda_1 = 9$ trovare gli altri due $\lambda_{2,3}$.

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitarî e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 3+2i \end{pmatrix}$.

3. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale con $\det(A) = +1$ e $\mathrm{tr}(A) = 2$,
descrivere l'azione di A come isometria di $\mathbb{R}^3$.

4. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} k^2 & 0 & k \\ 1+k & 2k-1 & 1+k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $y^2 + xy - xz - yz - x + y - 2z + 3 = 0$.

6. Vedendo $\mathbb{R}^2$ come sottoinsieme di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$,
descrivere l'equazione di una parabola $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ avente il punto all'infinito $[2:1:0]$

7. Calcolare $\int_\alpha xy^2(2y\,\mathrm{d}x + 3x\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha(t) = (1+t-t^2, t^7)$ per $t \in [0,1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 6/7/13 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare $A = \begin{pmatrix} 0 & -k^2+k-1 & 1-k^2 \\ -1 & k & -1 \\ 2k & k^2 & k^2+2k-1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Verificare che $\det(A) = 2k^4 + k^3 - 3k^2 - k + 1$.

(B) (2 punti) Determinare il polinomio caratteristico di A sapendo che vale $-2k^4 + 2k^3 + 4k^2 - 4k$ nel punto 1.

(C) (2 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $\lambda_1 = k^2 - 1$ trovare gli altri due.

(D) (2 punti) Trovare per quali k gli autovalori di A non sono distinti.

(E) (4 punti) Trovare per quali k la A non è diagonalizzabile.

2. Considerare $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 + 6t^2 + 9t + 2 \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice.

(B) (2 punti) Provare che α è regolare.

(C) (3 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $t = 1$.

(D) (2 punti) Calcolare $\int_\beta x \, \mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α all'intervallo $[0, 1]$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int_\gamma e^{xy}(y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y)$ dove γ è la restrizione di α all'intervallo $[-1, 0]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♢

1. $-\frac{1}{3}$ e $\frac{4}{3}$

2. $\frac{e^{i\vartheta}}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2i-3 \\ 2+i \end{pmatrix}$

3. Rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ intorno a una retta

4. $k \neq 1$

5. Paraboloide iperbolico

6. Ad esempio $x = (x-2y)^2$

7. 1

---

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) Alla terza colonna sottrarre la prima, poi alla seconda sottrarre la terza, quindi raccogliere k^2-1 dalla terza trovando $(k^2-1)(2k^2+k-1)$

(B) $t^3-(k^2+3k-1)t^2+(3k^3+2k^2-2k-1)t-(2k^4+k^3-3k^2-k+1)$

(C) $\lambda_2=k+1$, $\lambda_3=2k-1$

(D) $k=-1$, $k=0$, $k=2$

(E) $k=-1$, $k=2$

2.

(A) Se $s\neq t$ allora $\alpha(s)$ e $\alpha(t)$ hanno seconda componente uguale solo se $s=-t$ e $t\neq 0$, ma la prima componente di $\alpha(-t)$ è sempre diversa da quella di $\alpha(t)$ per $t\neq 0$

(B) La seconda componente di $\alpha'(t)$ si annulla solo in $t=0$, ma in $t=0$ la prima non si annulla

(C) $\frac{3}{2\sqrt{145^3}}$

(D) $\frac{57}{5}$

(E) $e^{-8}-e^{6}$