UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 17/9/13 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Calcolare $\int_\alpha (2y^2\,\mathrm{d}x - 3x\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (1-t^2, t^3)$.

2. Calcolare $\int_\alpha \cos(x+y)\cdot(\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \left(\sin\left(\frac{t^2}{\pi}\right), \frac{t}{2}\right)$.

3. Calcolare la curvatura nel punto $\alpha(0)$ della curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - 3t \\ t^2 - \sin(4t) \end{pmatrix}$.

4. Determinare i punti dell'insieme $\{[3+t : 1-t : t] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) :\ t \in \mathbb{R}\}$ che sono punti all'infinito della quadrica $4x^2 + z^2 - 2xy + xz + 5y = 2$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $-4x^2 + 2y^2 + 11z^2 - 4xy - 6xz - 10x + 4y + 2z = 0$. Giustificare la risposta.

6. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

7. Trovare $a \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ -5 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ sia coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♠ 4. ♡ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♢ 8. ♡ 9. ♠ 10. ♣

1. Considerare le matrici

$$M = \begin{pmatrix} 1+2i & 5-i \\ 1-3i & -2+i \end{pmatrix}, \qquad A = \frac{1}{2}\left(M + M^*\right), \qquad B = \frac{1}{2}\left(M - M^*\right).$$

(A) (2 punti) Calcolare la traccia, il determinante e il polinomio caratteristico di M.

(B) (2 punti) Provare che M è diagonalizzabile.

(C) (2 punti) Esibire A e B.

(D) (2 punti) Provare che A e B sono diagonalizzabili tramite matrici unitarie.

(E) (4 punti) Trovare gli autovalori di A e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ di autovettori di A.

2. Al variare di t in $\mathbb{R}$ considerare l'applicazione $f_t : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f_t(x,y) = {}^{\mathrm{t}}x \cdot \begin{pmatrix} 3 & t^2 \\ t+2 & 2|t| \end{pmatrix} \cdot y.$$

(A) (1 punto) Provare che f_t è sempre bilineare.

(B) (2 punti) Stabilire per quali valori di t la f_t è simmetrica.

(C) (2 punti) Determinare l'unico valore t_0 di t per cui f_t è un prodotto scalare.

Porre d'ora in poi $\langle\,.\,|\,.\,\rangle = f_{t_0}$ con t_0 il valore trovato al punto (C).

(D) (3 punti) Trovare un generatore della retta ortogonale rispetto a $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ al vettore $\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(E) (4 punti) Ortonormalizzare rispetto a $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Risposte

7. $\diamondsuit$

1. $-\frac{17}{10}$

2. 1

3. $-\frac{2}{25}$

4. $[1:3:-2]$ e $[9:23:-15]$

5. Iperboloide a una falda (ellittico)

6. $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -6;\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

7. $a = \pm 7\sqrt{2}$

1. $\heartsuit$ 2. $\spadesuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\heartsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\diamondsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\spadesuit$ 10. $\clubsuit$

Soluzioni

1.

(A) $\mathrm{tr}(M) = -1 + 3i,\ \det(M) = -6 + 13i,\ p_M(t) = t^2 + (1 - 3i)t - 6 + 13i$

(B) $p_M(t)$ ha discriminante $16 - 58i$ non nullo, dunque M ha autovalori distinti

(C) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3+i \\ 3-i & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2i & 2-2i \\ -2-2i & i \end{pmatrix}$

(D) A è hermitiana e B è antihermitiana

(E) $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 3;\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} 3+i \\ -5 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \end{pmatrix}$

2.

(A) Segue dalla linearità in ciascuno dei suoi argomenti del prodotto righe per colonne

(B) $t = -1$ e $t = 2$

(C) $t_0 = -1$

(D) $\begin{pmatrix} 3 \\ 16 \end{pmatrix}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$