UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/7/13 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ______

1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ trovare $p_A(t)$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = -5$, che $\det(A) = -13$ e che $p_A(-2) = 17$.

2. Trovare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 2k-5 & 2k-3 \\ 6-k & 4-k \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitari e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2+i \\ 1-4i \end{pmatrix}$.

4. Trovare per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 2+3i & 5-i \\ 5+i & z \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori.

5. Stabilire se la conica $2x^2 - 7xy + 4y^2 - 5x + 2y + 1 = 0$
sia non degenere e determinarne il tipo affine.

6. Trovare l'intersezione del luogo $\{[t-2 : t+3 : t+1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\}$
con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $z^2 + 2xy - 2xz - 8z + 3 = 0$.

7. Calcolare $\int_R y \cdot \cos(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dove $R = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\heartsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/7/13 — Esercizî

1. Considerare $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$, e definire B come la matrice della proiezione ortogonale su X

(A) (3 punti) Esibire B.

(B) (3 punti) Sapendo che A ha autovalore 2 provare che un autovettore relativo a 2 appartiene a X.

(C) (3 punti) Dedurre dal punto precedente che $A + B$ ha l'autovalore 3.

(D) (3 punti) Trovare gli autovalori di A e una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.

2. Considerare la conica $\mathcal{C} : \ 3x^2 - 2xy + 4x - 2y = 0$ e la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} - 1 \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} - 1 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Classificare $\mathcal{C}$ a meno di trasformazioni affini.

(B) (3 punti) Provare che l'immagine di α è contenuta in $\mathcal{C}$.

(C) (3 punti) Calcolare la curvatura di α in $t = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta 4y \, \mathrm{d}x$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.

Risposte

5. ♡

1. $t^3 + 5t^2 + 4t + 13$

2. $k = -3$

3. $\frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix} 1+4i \\ i-2 \end{pmatrix}$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$

4. $t + 3i$ con $t \in \mathbb{R}$

5. Iperbole

6. $[-1 : 4 : 2]$ e $[9 : 4 : 6]$

7. 1

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $B = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 13 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

(B) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $(A+B)\cdot v = A\cdot v + B\cdot v = 2v + v = 3v$

(D) $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.

(A) Iperbole

(B) Sostituendo le componenti di α nell'equazione si trova un'indentità.

(C) $\frac{1}{5\sqrt{5}}$

(D) $3 - 4e^{-1} + 3e^{-2}$