Algebra Lineare - 22/10/13

$(v_1, \dots, v_n)$ base di V se sono l.i. e generano

l'unica comb. lin. con risultato nullo è quella con coeff. tutti 0

ogni $v \in V$ è comb. lin. di $v_1 \dots v_n$

$\forall v \in V \; \exists x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

Prop: $\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{l.i.} \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_m) \Rightarrow n \leq m$

$\Rightarrow$ tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \begin{cases} \dots & \text{se } V \text{ ha basi} \\ +\infty \end{cases}$$

Lem: $\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{l.i.}$; $v_0, v_1, \dots, v_n$ l.i. $\Leftrightarrow v_0 \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$

Prop: se $\dim V = +\infty$ allora $\forall n$ esistono in V vettori $v_1, \dots, v_n$ lin. indip.

Dim: $V \neq \{0\}$: No, avrebbe $\dim = 0$;

Scelgo $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0 \Rightarrow v_1$ è l.i.;

$V \neq \mathrm{Span}(v_1)$: NO, avrebbe base $(v_1) \Rightarrow \dim = 1$

$\exists v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1) \underset{\text{Lem}}{\Rightarrow} (v_1, v_2)$ l.i.

continuo così (per induz.)

Trovati $v_1, \dots, v_k$ l.i.

$V \overset{?}{=} \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ NO, sarebbero base

$\exists\, v_{k+1} \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) \underset{\text{Lem}}{\Longrightarrow} v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ lin. indip.

$\boxed{\forall i}$

<u>Es</u>: in $\mathbb{R}[t]$ i vett $1, t, t^2, t^3, \dots, t^d$ sono lin. indip. $\forall d$

Prop: se $\dim V = n < +\infty$ e $W \subset V$ è sottosp allora $\dim W < +\infty$, e $\dim W \leq n$; inoltre se $\dim W = n$ allora $W = V$.

Dim: Se W avesse dim $= +\infty$ troverei

$$\underbrace{w_1, \dots, w_{n+1}}_{\text{l. indip} \subset W} \subset V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$$

$n+1$ l.i. $\subset \mathrm{Span}(n \text{ vett})$

NO per Prop. iniziale.

Ora se $\dim W = m$ prendo base $w_1, \dots, w_m$:

$$\underbrace{w_1, \dots, w_m}_{l.i.} \subset W \subset V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$$

$\Longrightarrow m \leq n$

Se $\dim W = n$ prendo base $w_1, \dots, w_m$

$\to W = V$ ✓

$\to W \subsetneq V$: $\exists v \in V, v \notin W$

$\underset{\text{Lem}}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{w_1, \dots, w_m, v}_{\text{l.i.}} \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ NO (Prop). $\boxed{\text{X}}$

Completamento a base:

Prop: se $\dim V = n < +\infty$, dati $v_1, \dots, v_k$ lin. indip. esistono $v_{k+1}, \dots, v_n$ t.c. $v_1, \dots, v_n$ è base di V.

Dim:

$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) \overset{?}{=} V$ → Sì: sono già una base (non aggiungo nulla, $k=n$)

→ No: $\exists v_{k+1} \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

$\underset{\text{Lem}}{\Longrightarrow}$ $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ lin. indip.

$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k+1}) \overset{?}{=} V$ → Sì: ho aggiunto 1 vett, ok

→ No: $\exists v_{k+2} \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k+1})$

$\overset{\text{Lem}}{\Longrightarrow} v_1, \dots, v_{k+2}$ lin. indip

Procedo così; mi fermo a $v_1, \dots, v_n$ per la Prop. $\boxed{V/\triangle}$

<u>Oss</u>: (v_1) è lin. indip. $\Longleftrightarrow v_1 \neq 0$

<u>Oss</u>: (v_1, v_2) lin. indip $\Longleftrightarrow$ nessuno dei due è multiplo dell'altro

$$\left(\begin{array}{l} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \text{ non entrambi nulli} \end{array} \Longrightarrow v_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot v_1 \quad \text{o} \quad v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_2 \right)$$

Es: $V = \mathbb{R}^3$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Span}(v_1) \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ aggiungo $v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\pi} \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Span}(v_1, v_2) \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ aggiungo $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$.

Ho trovato base.

Es: $V = \mathbb{R}^4$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ e \\ \pi \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

v_1, v_2 lin. indip

$\mathrm{Span}(v_1, v_2) \neq \mathbb{R}^4$; provo che $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ e \\ \pi \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\beta = \pi \alpha$ (IV)

$5\alpha + 8\pi\alpha = 0$ (II)

$\underbrace{\alpha(5 + 8\pi)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow \beta = 0$

Non ha soluz.

Aggiungo $v_3 = e_1$

Provo che $e_2 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ e \\ \pi \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ non ha soluz. (...)

$\Longrightarrow$ aggiungo $v_4 = e_2$ e ho base v_1, v_2, v_3, v_4

<u>Oss</u>: $V = \mathbb{R}^4$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aggiungo e_1

$\mathrm{Span}(v_1, v_2, e_1) \ni \underbrace{\underbrace{v_1 + v_2}_{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}} - e_1}_{e_2}$ $\Rightarrow$ non va bene aggiungere e_2

(Però e_3 sì.)

Estrazione di una base

Prop: dati $v_1, \dots, v_m$ che generano V di $\dim = n$, il seguente algoritmo conduce a una base di V:

- Scarto tutti i v_j iniziali nulli fino al primo $v_{j_1} \neq 0$
- Procedo scartando tutti i successivi v_j multipli di v_{j_1}, finché non trovo $v_{j_2} \notin \mathrm{Span}(v_{j_1})$
- Procedo scartando tutti i successivi v_j che stanno in $\mathrm{Span}(v_{j_1}, v_{j_2})$ finché arrivo a $j = m$ (fine) o trovo $v_{j_3} \notin \mathrm{Span}(v_{j_1}, v_{j_2})$

ETC

Es: $V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{ccccccccc} v_1 & v_2 & & & & & & & v_9 \\ \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} & \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{i_1 = 3} & \cancel{\begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ -35 \end{pmatrix}} & \cancel{\begin{pmatrix} \pi \\ -3\pi \\ 7\pi \end{pmatrix}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{i_2 = 6} & \underset{v_3 - v_6}{\cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ e \\ 19 \end{pmatrix}}_{i_3 = 8} & \cancel{\begin{pmatrix} 41 \\ \sqrt{3} \\ -16 \end{pmatrix}} \end{array}$$

Dimo: $v_{j_{k+1}} \notin \mathrm{Span}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \underset{\text{Lem}}{\Longrightarrow} v_{j_1}, \dots, v_{j_k}, v_{j_{k+1}}$ l.i.

(formalmente: per induzione) $\Longrightarrow v_{j_1}, \dots, v_{j_m}$ lin. indip.;

generale: provo che in ogni istante

Span(vettori tenuti) = Span(vettori esaminati)

($\Longrightarrow$ alla fine Span(tutti tenuti) = Span(tutti) = V).

Per induzione: fino a j ho tenuto $v_{j_1}, \dots, v_{j_h}$

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_j) = \mathrm{Span}(v_{j_1}, \dots, v_{j_h})$$

v_{j+1} ?

$\nearrow$ No : lo tengo $\mathrm{Span}(v_{j_1}, \dots v_{j_h}, v_{j_{h+1}}) = \mathrm{Span}(v_1, \dots v_{j+1})$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{v_{j+1}}$

$\searrow$ Sì : lo scarto ; allora

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_j, v_{j+1}) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_j)$$

$\Rightarrow$ OK. $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \boxtimes$

Cor : Sia $\dim(V) = n$; dati $v_1, \dots, v_n \in V$:

$v_1, \dots, v_n$ l. indip $\Longleftrightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ generano

(Cioè: numero giusto di vettori per essere una base

+ ½ def. di base $\Rightarrow$ l'altra metà def.)

Dim: $\boxed{\Rightarrow}$: se non generassero potrei aggiungerne trovandone $n+1$ lin. indip. NO

$\boxed{\Leftarrow}$: se non fossero l.i. potrei estrarne una base trovando base con $< n$ el. NO.

$\boxtimes$

$\underline{Es}$; $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \underbrace{v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \pi \\ -3 \end{pmatrix}}_{2 \text{ vett}}$

$\dim V = 2$

Se provo che sono l.i. deduco che generano, cioè sono base.

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \pi \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha = \beta = 0 \quad \underline{\text{SI}}$$

(II) $\beta = 2\alpha$

(I) $2(1+\pi)\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$

Es: $\underbrace{V = \mathbb{R}^3}_{\dim = 3}$ $\underbrace{v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$

3 vett: se provo che sono l.i.
deduco che sono base

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Sì

II $\quad \beta = 5\alpha + 2\gamma \qquad \gamma = -3\alpha$

I $\quad 33\alpha + 13\gamma = 0 \qquad -6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0$

III $\quad -3\alpha - \gamma = 0$

Formule di Grassmann

V sp. vett. $W, Z \subset V$ sottosp.

$\Rightarrow W \cap Z$ è un sottosp.

Oss: $W \cup Z$ è un sottosp $\Longleftrightarrow W \subset Z$ o $Z \subset W$

$\Longleftarrow$: ovvio

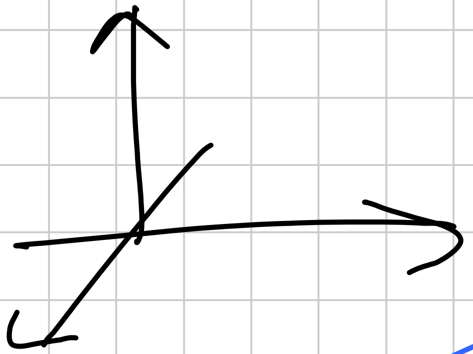
$\Rightarrow$: Se $W \not\subset Z$ e $Z \not\subset W$ esistono

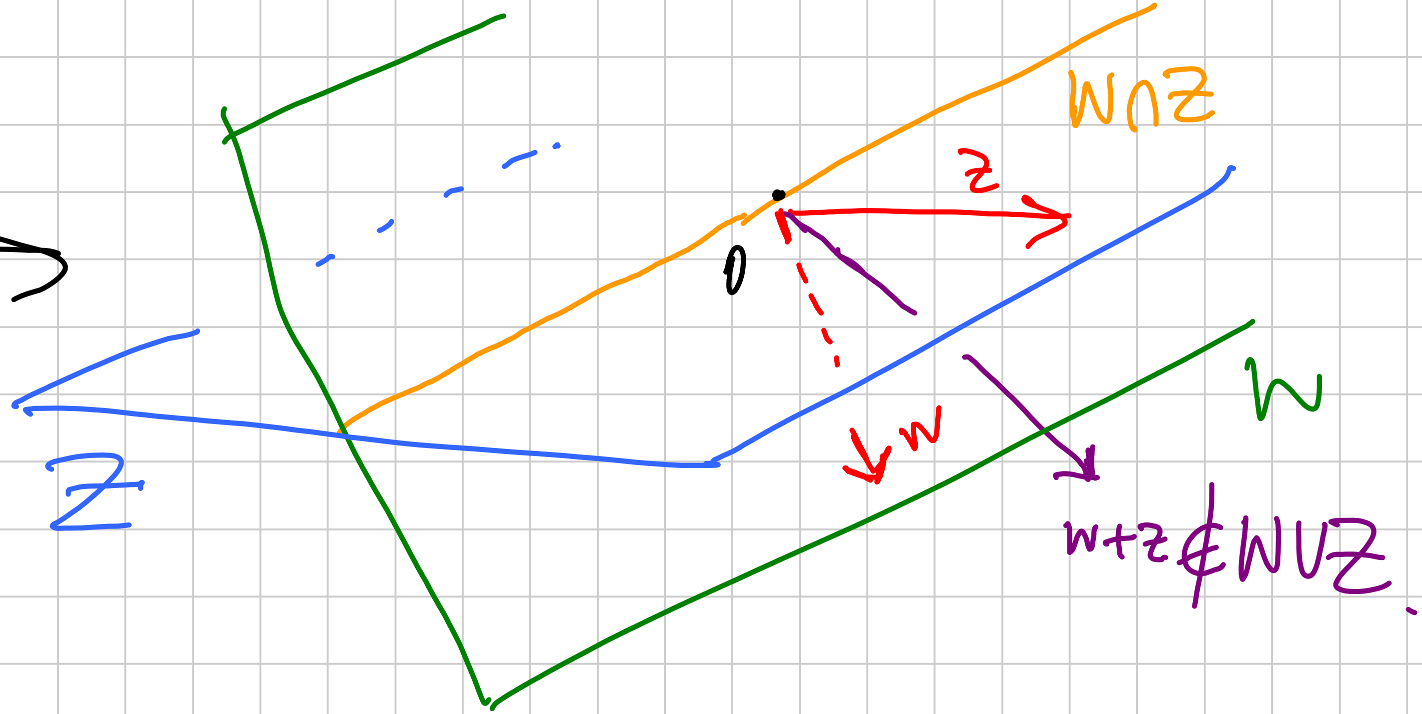
$w \in W, w \notin Z \quad z \in Z, z \notin W$

$\Rightarrow z, w \in W \cup Z \Rightarrow z + w \in W \cup Z$

$$z + w = \begin{cases} w' \in W \Rightarrow z = w' - w \in W \text{ assurdo} \\ z' \in Z \Rightarrow w = z' - z \in Z \text{ assurdo} \end{cases}$$

$V = \mathbb{R}^3$





Def: Chiamo somma di W e Z, indicata $W+Z$, il sottosp. $\mathrm{Span}(W \cup Z)$.

NUOVO

Prop: $W+Z = \{w+z : w \in W, z \in Z\}$

Dim: Sia T l'insieme a dx; devo vedere che

$T = \mathrm{Span}(W \cup Z)$ cioè:

1. $T \supset W \cup Z$
2. T è sottosp
3. S sottosp, $S \supset W \cup Z \Rightarrow S \supset T$

Infatti:

1. $w \in W$, $\quad w = \underset{\underset{W}{\Cap}}{w} + \underset{\underset{Z}{\Cap}}{0} \Rightarrow w \in T$

$z \in Z$, $\quad z = 0 + z \Rightarrow z \in T$

2. $t_1, t_2 \in T \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$t_1 = \underset{\underset{W}{\Cap}}{w_1} + \underset{\underset{Z}{\Cap}}{z_1}$, $\quad t_2 = \underset{\underset{W}{\Cap}}{w_2} + \underset{\underset{Z}{\Cap}}{z_2}$

$$\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 = \underbrace{(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)}_{\in W} + \underbrace{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}_{Z}$$

$\Rightarrow \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \in T$

3. $S \supset W \cup Z$; se $t \in T$ cioè $t = \underset{W}{\underset{\cap}{w}} + \underset{Z}{\underset{\cap}{z}}$

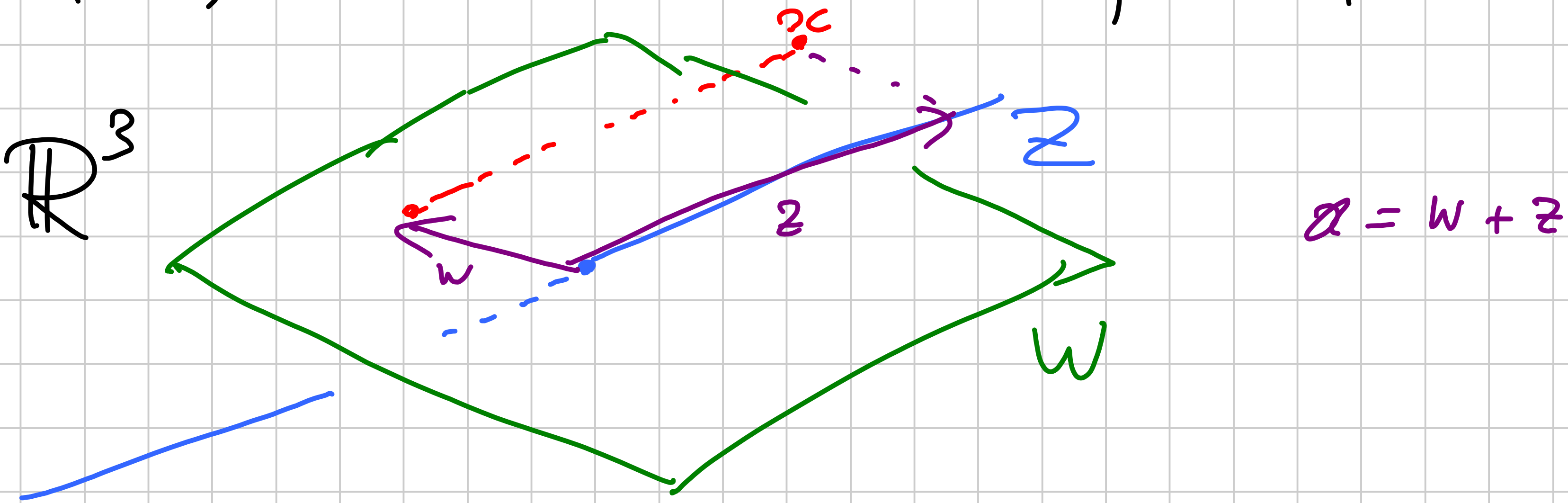
allora $w \in W \subset W \cup Z \subset S$
$z \in Z \subset W \cup Z \subset S$ $\Rightarrow w + z \in S$

cioè $t \in S$. $\boxtimes$

Teo (Grassmann): $\dim V < +\infty$, $W, Z \subset V$ sottosp.

$$\Rightarrow \dim(W) + \dim(Z) = \dim(W \cap Z) + \dim(W+Z).$$

Es: $V = \mathbb{R}^3$



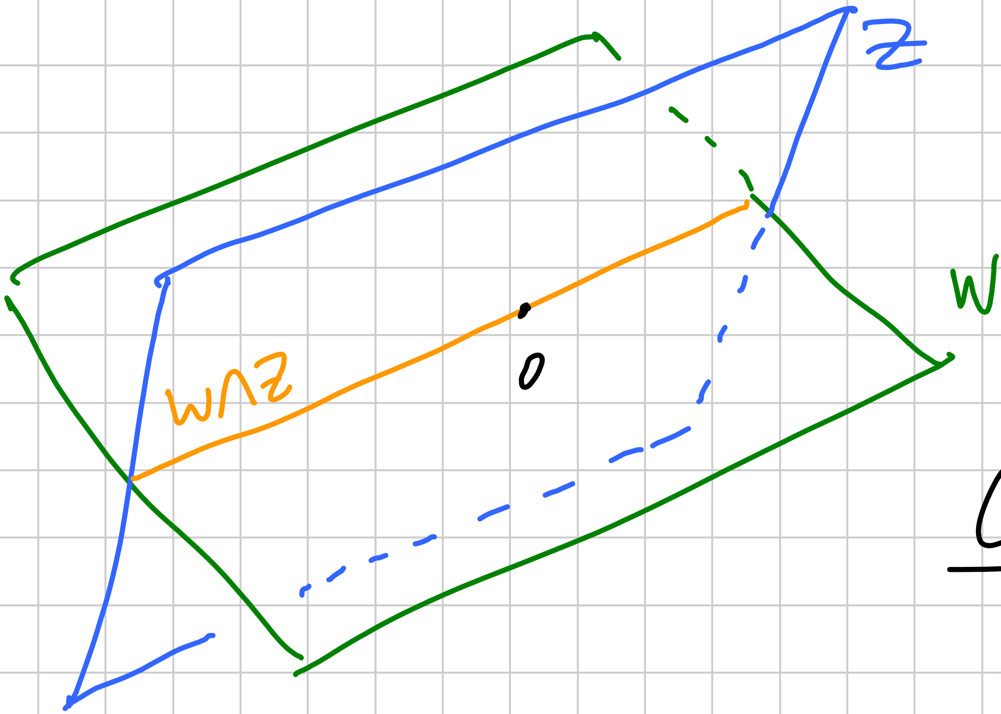
$\dim Z = 1$
$\dim W = 2$

$\dim(Z \cap W) = 0$

Oss: $W + Z = \mathbb{R}^3$

Gr: $\dim(W+Z) = 1 + 2 - 0$ ✓

Es: $V = \mathbb{R}^3$



Oss: $W + Z = \mathbb{R}^3$

$\dim Z = \dim W = 2$

$\dim(Z \cap W) = 1$

Gr: $\dim(W+Z) = 2+2-1$ ✓