Algebra Lineare 27/11/13

Tramite determinante:

- Stabilire se $A \in M_{n \times n}$ è invertibile
- In tal caso, calcolare A^{-1}
- Calcolare rango di $A \in M_{m \times n}$ (oggi)

<u>D</u>ef: Se $A \in M_{m \times n}$ chiamo sottomatrice di A una matrice B ottenuta da A

cancellando alcune righe e colonne.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \pi & e \\ -3 & 11 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ -4 & -7 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

sottomatrice di A.

Diremo che B' è una orlata di B se B si ottiene da B' cancellando una riga e una colonna (B, B' sottomatrici di A).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & \boxed{-2} & -3 & -4 & \boxed{-5} \\ a & b & c & d & e \\ -a & -b & -c & -d & -e \\ 9 & \boxed{8} & 7 & 6 & \boxed{10} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 \\ a & d & e \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

<u>Teo</u> (degli orlati): Sia $A \in M_{m \times n}$;
se esiste una sottomatrice $B \in M_{r \times r}$ t.c.
(1) $\det(B) \neq 0$ (2) $\det(B') = 0$ $\forall B'$ orlata di B
allora $\operatorname{rank}(A) = r$.
(Dim. nel seguito.)

Strategia per il calcolo di rank(A):

- Se tutti i coeff. di A sono 0, allora $\mathrm{rank}(A)=0$; altrimenti fisso un coeff. ($B_1 \in M_{1\times 1}$ sottomatrice di A) non nullo ($\det B_1 \neq 0$)
- Guardo tutte le orlate 2×2 di B_1 (non tutte le 2×2, solo le orlate di B_1): se tutte hanno $\det = 0$, allora $\mathrm{rank}(A) = 1$ (Teo); altrimenti fisso una qualsiasi B_2 orlata di B_1 con $\det(B_2) \neq 0$;

- Guardo tutte le orlate 3x3 di B_2 (non tutte le 3x3): se tutte hanno $\det = 0$, allora $\operatorname{rank}(A) = 2$ (Teo); se no fisso B_3 orlata di B_2 con $\det(B_3) \neq 0$
- ....

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & \boxed{-7} & 13 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$B_1 = (-7)$; ci sono 6 2x2 orlate di B_1

(invece in tutto le 2×2 sono $3 \cdot 6 = 18$)

$\det\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -7 & 13 \end{pmatrix} = -30 \neq 0$; scelgo $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}$;

ci sono 2 3×3 orlate di B_2

(invece in tutto ci sono 4 3×3 sottomatrici)

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & -7 & 13 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} = 105 + 26 - 48 + 56 - 20 - 117$$

$$= 187 - 185 = 2 \neq 0 \quad (\Rightarrow \text{rank} = 3)$$

Se fosse stato 0, dovevo guardare

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 3 & -7 & 13 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{rank} = 2 \\ \neq 0 \Rightarrow \text{rank} = 3 \end{cases}$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & -7 & 13 \\ 2 & \boxed{1} & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = (1)$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 13 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -5 & 4 & 10 \\ -8 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & -7 & 13 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 10 & 20 & 6 \\ 16 & 32 & 13 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rank}(A) = 2$$

Dimo (Teo): Ipotesi: esiste sottomatr B $r \times r$ con $\det \neq 0$ e tutte le orlate hanno $\det = 0$; Tesi: $\operatorname{rank}(A) = r$.

Riordinando le colonne e le righe (il che non cambia il rango:
colonne: ok, il generato delle colonne non cambia;
righe: stiamo applicando una permutazione delle coordinate in $\mathbb{R}^m$, che è lineare bijettiva),
posso supporre che B sia la sottomatrice delle prime r righe e r colonne:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{B}_{r} & \vdots \\ \hline \cdots & \ddots \end{array}\right)\Big\}r$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} c_1, & \dots, & c_r & c_{r+1} & \dots & c_n \\ \hline a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & & & a_{r,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \underbrace{a_{m,1} \quad \dots \quad}_{r} & & & & & a_{m,n} \end{array}\right)\Big\}r$$

So $\det(c_1,\dots,c_r) \neq 0 \Longrightarrow (c_1,\dots,c_r)$ base di $\mathbb{R}^r$

$\Rightarrow \forall j > r$ esistono unici $\beta_1^{(j)}, \dots, \beta_r^{(j)}$ t.c.

$$c_j = \beta_1^{(j)} c_1 + \dots + \beta_r^{(j)} c_r .$$

orlate di B ottenute aggiungendo riga i e colonna j

Dati $i > r$, $j > r$ so che

$$\det \begin{pmatrix} c_1, \dots, c_r, & c_j \\ a_{i1}, \dots, a_{ir}, & a_{ij} \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ le col. sono lin. dip., ma $c_1, \dots, c_r$ sono lin. indip. $\Rightarrow$ l'ultima è comb. lin. delle prime cioè esistono $\alpha_1^{(ij)}, \dots, \alpha_r^{(ij)}$ t.c.

$$\begin{pmatrix} c_j \\ a_{ij} \end{pmatrix} = \alpha_1^{(ij)} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ a_{i1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r^{(ij)} \cdot \begin{pmatrix} c_r \\ a_{ir} \end{pmatrix} ;$$

ma in tal caso ho $c_j = \alpha_1^{(ij)} c_1 + \dots + \alpha_r^{(ij)} \cdot c_r$

$$\Longrightarrow \alpha_1^{(ij)} = \beta_1^{(j)}, \dots, \alpha_r^{(ij)} = \beta_r^{(j)}$$

(cioè: $\alpha_k^{(ij)}$ non dipende da i);

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} c_j \\ a_{r+1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} = \beta_1^{(j)} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ a_{r+1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \dots + \beta_r^{(j)} \cdot \begin{pmatrix} c_r \\ a_{r+1,r} \\ \vdots \\ a_{m,r} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ j-esima colonna di A $\forall j > r$

$\uparrow$ I col. di A

...

$\uparrow$ r-esima col. di A

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A) \leq r$, ma le prime r colonne sono lin. indip $\Rightarrow \mathrm{rank}(A) = r$. $\blacksquare$