UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 19/7/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se in $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 0\}$ sono dati 3 vettori non nulli, si può concludere che essi sono una base di V? Spiegare.

2. Se $f : \mathbb{C}^9 \to \mathbb{C}^4$ è surgettiva e $W \subset \mathbb{C}^9$ è un sottospazio con $\dim(W \cap \operatorname{Ker}(f)) = 1$, che dimensione può avere W?

3. Data la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ di $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 = x_1 + x_2\}$,

posto $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 \\ -2x_2 + x_3 \\ -x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}$ trovare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

4. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{2\,3}$.

5. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Per i numeri complessi $z_1 = 6 + 5i$ e $z_2 = 7 + 4i$ considerare i moduli ρ_1, ρ_2 e gli argomenti ϑ_1, ϑ_2 scelti nell'intervallo $[0, 2\pi)$. Stabilire quale sia maggiore tra ρ_1 e ρ_2, e quale sia maggiore tra ϑ_1 e ϑ_2.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0\}$ e $Y = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

calcolare la proiezione su X di $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 19/7/14 — Esercizî

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare il sistema $\begin{cases} (t+1)x - 2y + z + (t+2)w = -1 \\ 3x + (t-2)y - 2z + 4w = -t \\ 5x + (t-8)y + 4z + (t+3)w = 1. \end{cases}$

(A) (3 punti) Risolvere il sistema per $t = 1$.

(B) (3 punti) Trovare il sottospazio X di giacitura dell'insieme delle soluzioni per $t = 2$; inoltre, posto $Y = \mathrm{Span}(e_1,\ e_2,\ e_4)$, trovare la matrice della proiezione su Y relativa alla decomposizione $\mathbb{R}^4 = X \oplus Y$.

(C) (3 punti) Trovare l'unico valore t_0 di t per il quale l'insieme delle soluzioni non è una retta.

(D) (3 punti) Risolvere il sistema per $t = t_0$.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
e porre $X = \mathrm{Span}(v_1,\ v_2,\ v_3)$, $Y = \mathrm{Span}(v_1,\ v_2)$, $Z = \mathrm{Span}(v_3)$.

(A) (1 punto) Provare che $\mathcal{B} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ è una base di X.

(B) (3 punti) Provare che $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}$ appartiene a X e trovare $[v]_{\mathcal{B}}$.

(C) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di X.

(D) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di Y.

(E) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di Z.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. No; se sono linearmente indipendenti oppure se generano allora sono automaticamente una base, ma possono non esserlo (ad esempio se si tratta del vettore $7e_1 + 5e_3$ ripetuto 3 volte)

2. Tra 1 e 5 compresi

3. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -5 & -17 \end{pmatrix}$

4. $\frac{2}{17}$

5. -131 e 73

6. $\rho_2 > \rho_1$, $\vartheta_1 > \vartheta_2$

7. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -37 \\ 34 \\ 27 \end{pmatrix}$

Soluzioni

1.

(A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

(B) $X = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $t_0 = 3$

(D) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

2.

(A) I vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti.

(B) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

(C) $3x + y + z - 2w = 0$

(D) $\begin{cases} 11x - 5y + 7z = 0 \\ -13y + 5z + 11w = 0 \end{cases}$

(E) $\begin{cases} 2x + z = 0 \\ 2y + 5z = 0 \\ 2w + 3z = 0 \end{cases}$