Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 27/1/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se sono date $f : V \to W$ lineare invertibile, una base $\mathcal{B}$ di V e una base $\mathcal{C}$ di W, conoscendo $\det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)$, è possibile calcolare $\det\left([f^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)$? Giustificare la risposta.

2. Data la base $\mathcal{B} = (-e_1 + e_2 + e_3,\ 2e_1 - e_2 + 4e_3)$ di $\{x \in \mathbb{R}^3 :\ 5x_1 + 6x_2 - x_3 = 0\}$, determinare $[e_1 + e_2 + 11e_3]_{\mathcal{B}}$.

3. Se $A = (v_1,\ v_2) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ e $B = ((1+i)v_1 + 3v_2,\ (2-i)v_1 + (1+3i)v_2)$, sapendo che $\det(A) = 1 - i$ calcolare $\det(B)$.

4. Dato il polinomio $p(z) = 2z^3 - (1+3i)z^2 + 2iz + 1 - i$, sapendo che $p(i) = 0$ trovare tutte le radici di $p(z)$ con le loro molteplicità.

5. Se $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^7$ è lineare e $f(e_1 + ie_3) = f(ie_1 + e_2 + (1-i)e_4) = (5-i)e_4 + e_7$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

6. Risolvere $\begin{cases} x + y - z = 7 \\ 2x + 4y + z = 10 \\ -x + y + 4z = -11. \end{cases}$

7. Calcolare la proiezione su X di $9e_1 - 4e_2 - 2e_3 + 4e_4$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^4 = X \oplus Y$ dove $X = \mathrm{Span}(e_1 + 2e_3 + e_4,\ e_2 + 3e_3 - e_4)$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2 + e_4,\ 4e_1 - e_2 - e_3)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 27/1/14 — Esercizî

1. Considerare $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right)$, $X=\{x\in\mathbb{R}^3:\ x_1+2x_2-3x_3=0\}$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$, $v_1(t)=\begin{pmatrix}1-8t\\t+1\\1-2t\end{pmatrix}$, $v_2(t)=\begin{pmatrix}12-t\\-t\\4-t\end{pmatrix}$ con $t\in\mathbb{R}$, e le applicazioni lineari $f:X\to\mathbb{R}^2$ tali che $f(v_1(t))=\begin{pmatrix}t+4\\4-5t\end{pmatrix}$ e $f(v_2(t))=\begin{pmatrix}2-3t\\2t\end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che $\mathcal{C}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

(B) (2 punti) Provare che $\mathcal{B}$ è una base di X e che $v_1(t)$ e $v_2(t)$ appartengono a X per ogni $t\in\mathbb{R}$.

(C) (4 punti) Discutere al variare di $t\in\mathbb{R}$ quante f esistono.

(D) (2 punti) Trovare il valore di t per cui f esiste ed è unica ma non è invertibile.

(E) (3 punti) Per $t=-1$ trovare $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

2. Al variare di $s,t\in\mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_s:\ \begin{cases}(s+2)x+3sy+(1-s)z=2s\\(1+3s)x+(5-s)y+4sz=3-s\end{cases}\qquad F_t=\begin{pmatrix}2\\t-1\\t+1\end{pmatrix}+\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}t+2\\t-2\\t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-t\\t-2\\t-3\end{pmatrix}\right).$$

(A) (2 punti) Trovare $n_0,n_1\in\mathbb{N}$ e $s_0\in\mathbb{R}$ tali che $\dim(E_s)$ valga n_0 per $s=s_0$ e n_1 per $s\neq s_0$.

(B) (2 punti) Trovare $m_0,m_1\in\mathbb{N}$ e $t_0\in\mathbb{R}$ tali che $\dim(F_t)$ valga m_0 per $t=t_0$ e m_1 per $t\neq t_0$.

(C) (2 punti) Trovare equazioni parametriche di E_s per $s=2$ e per $s=s_0$.

(D) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_t per $t=-1$ e per $t=t_0$.

(E) (2 punti) Discutere la posizione reciproca di E_2 ed F_{-1}.

(F) (2 punti) Discutere la posizione reciproca di E_1 ed F_0.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. Sì, $\det\left([f^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right) = \frac{1}{\det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)}$

2. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $15i - 1$

4. Radice i con molteplicità 2 e radice $\frac{1}{2}(1-i)$ con molteplicità 1

5. Tra 1 e 3 compresi

6. $\begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 1 - 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

7. $e_1 - e_2 - e_3 + 2e_4$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) I vettori che costituiscono $\mathcal{C}$ sono linearmente indipendenti

(B) Sia i vettori che costituiscono $\mathcal{B}$ sia $v_1(t)$ e $v_2(t)$ soddisfano l'equazione di X; inoltre i vettori che costituiscono $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti

(C) Infinite per $t = 2$, nessuna per $t = -\frac{2}{3}$, una sola altrimenti

(D) $t = \frac{4}{13}$

(E) $\begin{pmatrix} -57 & -125 \\ 100 & 219 \end{pmatrix}$

2.

(A) $n_0 = 2$, $n_1 = 1$, $s_0 = -1$

(B) $m_0 = 1$, $m_1 = 2$, $t_0 = 2$

(C) $E_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix} -17 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}$

$E_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

(D) $F_{-1}:\ 3x + y = 4$

$F_2 : \begin{cases} y = 1 \\ x - 2z = -4 \end{cases}$

(E) Incidenti nel punto $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(F) Paralleli tra loro