Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 28/6/14 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 \\ 7x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

2. Se in $X = \{p(t) \in \mathbb{C}_{\leqslant 4}[t] : \ p(-i) = p'(1+i)\}$ sono dati $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ linearmente indipendenti, si può concludere che costituiscono una base? Giustificare la risposta.

3. Se $\varphi : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^7$ è lineare non surgettiva e $\varphi(7e_1 - 4e_3) = 8e_5$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(\varphi)$?

4. Risolvere $\begin{cases} 2x + y - 3z = 8 \\ 3x - y - z = 6 \\ x + 3y - 5z = 10. \end{cases}$

5. Calcolare $\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}^{-1}$.

6. Data $A = (v_1,\ v_2,\ v_3) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con $\det(A) = -\frac{1}{13}$
calcolare $\det(2v_1 + 3v_2,\ -v_1 + 2v_2 + 4v_3,\ 6v_1 - v_3)$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
calcolare la proiezione su X di $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 28/6/14 — Esercizî

1. Considerare $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Posto $f(x) = A \cdot x$ provare che f è invertibile.

(B) (2 punti) Calcolare $(A^{-1})_{21}$.

(C) (2 punti) Provare che le colonne di B costituiscono una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.

(D) (2 punti) Provare che le colonne di C costituiscono una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

(E) (3 punti) Calcolare la prima colonna di $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

2. Al variare di $s, t \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_s : \begin{cases} (1-2s)x + (s-2)y + (s-1)z = s \\ -(3s+1)x + (5-s)y + (s+1)z = s+3 \end{cases} \qquad F_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3-t \\ -1-t \\ t+3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t-2 \\ t+4 \\ -t-7 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (3 punti) Trovare $m, m_0 \in \mathbb{N}$ e $s_0 \in \mathbb{R}$ tali che E_s ha dimensione m per $s \neq s_0$, mentre ha dimensione m_0 per $s = s_0$.

(B) (3 punti) Trovare $n, n_0 \in \mathbb{N}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tali che F_t ha dimensione n per $t \neq t_0$, mentre ha dimensione n_0 per $t = t_0$.

(C) (2 punti) Trovare equazioni parametriche di E_s per $s = -2$ e per $s = s_0$.

(D) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_t per $t = 1$ e per $t = t_0$.

(E) (2 punti) Trovare l'intersezione tra E_1 e $F_{(-1)}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♡

1. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$

2. No perché X ha dimensione 4

3. Tra 2 e 7 compresi

4. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

5. $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2i & 2+2i \\ 3+i & -2 \end{pmatrix}$

6. -5

7. $\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 21 \\ -25 \\ -26 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\det(A) = 12$

(B) $\frac{5}{12}$

(C) $\det(B) = -9$

(D) $\det(C) = 1$

(E) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2.

(A) $m = 1,\ m_0 = 2,\ s_0 = 3$

(B) $n = 2,\ n_0 = 1,\ t_0 = 5$

(C) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

(D) $x - 3y - 2z = -3, \quad \begin{cases} 4x + z = 9 \\ 4y + 3z = 7 \end{cases}$

(E) $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$