UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 14/2/15 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ ha gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (elencati con la loro molteplicità), quali sono gli autovalori di $A^* = \overline{{}^{\mathrm{t}}A}$?

2. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

3. Trovare la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul sottospazio di equazione $5x_1+2x_2-3x_3 = 0$.

4. Descrivere a meno di coniugio tutte le matrici 4×4 ortogonali prive di autovalori reali.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $3x^2 - 8y^2 - 10xy + 6xz + 4yz + 4x - 2y = 0$.

6. Provare che in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ un piano P (sottospazio proiettivo di dimensione 2) e una retta ℓ (sottospazio proiettivo di dimensione 1) hanno sempre almeno un punto in comune, ed esibire un esempio in cui hanno un solo punto in comune.

7. Calcolare $\int_{\partial D} y \, \mathrm{d}x$, dove D è il disco chiuso di centro $(e^4, -19)$ e raggio $\sqrt{3}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 14/2/15 — Esercizî

1. Al variare di $a \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 4i & -ia^2 + (2i-3)a + 2(2+i) \\ ia + 2 & (1+3i)a + 2(1-i) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(M) = 3ia^3 + (2-3i)a^2 - 8a + 4i$.

(B) (2 punti) Determinare $p_M(z)$.

(C) (2 punti) Sapendo che $\lambda_1 = a^2 - a + 2i$ è un autovalore di M, determinare l'altro λ_2.

(D) (3 punti) Determinare le molteplicità algebriche degli autovalori di M al variare di $a \in \mathbb{C}$.

(E) (3 punti) Determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di M al variare di $a \in \mathbb{C}$, deducendone i valori di a per i quali M è diagonalizzabile.

2. Considerare la curva $\alpha : D \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} 4s - \ln(1+s) \\ 3s - e^{2s} \\ 2s + s^2 - s^3 \end{pmatrix}$,

dove D è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui l'espressione di α ha senso.

(A) (1 punto) Esplicitare D.

(B) (2 punti) Provare che α è regolare su D.

(C) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s = 0$.

(D) (3 punti) Determinare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int_\beta z \, \mathrm{d}x$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}$

2. $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -4;\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

3. $\frac{1}{38}\begin{pmatrix} 13 & -10 & 15 \\ -10 & 34 & 6 \\ 15 & 6 & 29 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} R_\vartheta & 0 \\ 0 & R_\varphi \end{pmatrix}$ con $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ e $\vartheta, \varphi \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$

5. Paraboloide iperbolico

6. P è l'immagine in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di $W \setminus \{0\}$ con $W \subset \mathbb{R}^4$ sottospazio di dimensione 3, mentre ℓ è l'immagine in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di $Z \setminus \{0\}$ con $Z \subset \mathbb{R}^4$ sottospazio di dimensione 2; allora $W \cap Z$ ha dimensione almeno $3+2-4 = 1$, quindi contiene sempre almeno un sottospazio U di dimensione 1, e allora $P \cap \ell$ contiene almeno il punto immagine di $U \setminus \{0\}$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$; se $W = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$ e $Z = \mathrm{Span}(e_1, e_4)$ si ha $P \cap \ell = \{[1:0:0:0]\}$

7. -3π

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) Sostituendo la seconda colonna con sé stessa più i volte la prima, e poi la prima riga con sé stessa meno $2i$ volte la seconda, ci si riconduce a $\begin{pmatrix} a^2 & 3a-2i \\ ia+2 & 3ia+2 \end{pmatrix}$ e i conti sono semplici; si può anche raccogliere $2+3ia$ dalla seconda colonna, trovando

$$(2+3ia)\det\begin{pmatrix} a^2 & -i \\ 2+ia & 1 \end{pmatrix} = (2+3ia)(a^2-a+2i)$$

che coincide con l'espressione voluta

(B) $z^2-(a^2+(3i-1)a+2(1+i))z+3ia^3+(2-3i)a^2-8a+4i$

(C) $\lambda_2 = 2+3ia$

(D) Per $a \neq 1+i, 2i$ autovalori $\lambda_{1,2}$ con molteplicità algebrica 1;
per $a = 1+i$ autovalore $-1+3i$ con molteplicità algebrica 2;
per $a = 2i$ autovalore -4 con molteplicità algebrica 2;

(E) Per $a \neq 1+i, 2i$ autovalori $\lambda_{1,2}$ con molteplicità geometrica 1;
per $a = 1+i$ autovalore $-1+3i$ con molteplicità geometrica 1;
per $a = 2i$ autovalore -4 con molteplicità geometrica 2;
dunque M è diagonalizzabile per $a \neq 1+i$

2.

(A) $(-1, +\infty)$

(B) La prima componente di $\alpha'(s)$ si annulla solo nel punto $s = -\frac{3}{4}$, nel quale non si annulla la terza componente di $\alpha'(s)$

(C) $t = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{3990}}\begin{pmatrix} 5 \\ -59 \\ 22 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{285}}\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix}$

(D) $\kappa = \frac{\sqrt{285}}{14\sqrt{14}}$, $\tau = \frac{6}{19}$

(E) $\frac{11}{3}$