Esercizi del 25/3/2014

$\boxed{1(c)}$ $\begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ -1 & t-4 \end{vmatrix} = t^2 - 7t + 14 = p_A(t)$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-56}}{2} = 7/2 \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$\boxed{1(d)}$ $\begin{vmatrix} t-(i+1) & \frac{1}{5}(7+i) \\ -2+i & t-3 \end{vmatrix} = p_A(t) =$

$$t^2 - (4+i)t + 3 + 3i + 14/5 + \frac{2}{5}i - 7/5 i + \frac{1}{5}$$

$$= t^2 - (4+i)t + 6 + 2i$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4+i \pm \sqrt{(4+i)^2 - 24 - 8i}}{2} =$$

$$= \frac{4+i \pm \sqrt{\cancel{8i} - 1 - 8 - \cancel{8i}}}{2} = \frac{4+i \pm 3i}{2} \begin{cases} 2+2i \\ 2-i \end{cases}$$

$\boxed{1(f)}$

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -3 & 3 \\ 0 & t+1 & -3 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2)(t^2-1) - 2(9-3t-3)$$
$$= t^3 - 2t^2 + 5t - 10$$

$$p_A(2) = \cancel{8} - \cancel{2}4 + 5\cancel{\cdot 2} - 1\cancel{0} = 0$$

$$p_A(t) = (t-2)(t^2+5) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{5}$$

$\boxed{1(g)}$ base di V : $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_2}$

$$f\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-5\\-14\end{pmatrix}$$

$$(-2\cdot)\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+(-7)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-5\\-14\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}=\{v_1,v_2\}\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&-7\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_f(t)=\begin{vmatrix}t-1&2\\0&t+7\end{vmatrix}=(t-1)(t+7)$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-7$$

$\boxed{1(h)}$ $\mathcal{B}=\{1,t\}\subset V$ base

$$f(1)=1+t,\ f(t)=3-2\cdot t$$

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&3\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$p_f(t)=\begin{vmatrix}t-1&-3\\-1&t+2\end{vmatrix}=t^2+t-5$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+20}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$$

$\boxed{1(i)}$ $V=\{a_0+a_1t+a_2t^2\mid a_0+a_1+a_2=0\}$

base $\mathcal{B}=\{t-1,\ t^2-1\}$

$$f(t-1)=(t-1)\cdot 1+(t^2-1)\cdot(-3)$$

$$f(t^2-1)=(t-1)\cdot 2t+(t^2-1)\cdot 3=$$

$$=[(t^2-1)-(t-1)]\cdot 2+(t^2-1)\cdot 3=(-2)(t-1)+5\cdot(t^2-1)$$

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$p_f(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 2 \\ 3 & t-5 \end{vmatrix} = t^2 - 6t - 1$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+1} = 3 \pm \sqrt{10}.$$

$\boxed{2}$ Sia $\mathcal{B}_W$ una base di W, e $\mathcal{B}_V$ una base di V ottenuta completando $\mathcal{B}_W$ ad una base di V. Allora

$$[f]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} [g]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_W} & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$p_f(t) = \begin{vmatrix} t \cdot I - [g]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_W} & -B \\ 0 & t \cdot I - C \end{vmatrix} =$$

$$= p_g(t) \cdot \det(t \cdot I - C).$$

$\boxed{3}$ Sia $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ l'applicazione associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nella base canonica. Allora $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{Span}(e_1)$, e $f(e_1) = 0$, dunque 0 è tra gli autovalori possibili. Viceversa, se $f(v) = \lambda v$ allora se $\lambda \neq 0$ $v = \frac{1}{\lambda} f(v) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ $\Rightarrow f(v) = 0 = \lambda v$, che dà una contraddizione.

Quindi l'unico autovalore possibile è $\lambda = 0$, e un'applicazione f con $\ker f = \operatorname{Im} f$ e diagonalizzabile è necessariamente l'applicazione nulla.

$\boxed{4}$ Se $n > 0$ è pari non è detto che A abbia autovalori reali:

$$A = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad p_A(t) = (t^2+1)^k,$$

che non ha radici reali. Per n dispari $p_A(t)$ è un polinomio di grado dispari a coefficienti reali, e quindi ha almeno una radice reale, ad esempio perché $p_A(t)$ è una funzione continua in t e

$$\lim_{t \to -\infty} p_A(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} p_A(t) = +\infty$$

[usando che il coefficiente di t^n è $+1$].

$\boxed{5}$ $$p_A(t) = \det(tI - A) = \det\left({}^t(tI - A)\right)$$
$$= \det(tI - {}^tA) = p_{{}^tA}(t)$$

$\Rightarrow$ A e ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche. Inoltre, dato un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ di A (e quindi di ${}^tA$)

La molteplicità geometrica di λ è

$$\dim \mathrm{Ker}(\lambda I - A) = n - \mathrm{rk}(\lambda I - A)$$
$$= n - \mathrm{rk}({}^t(\lambda I - A)) =$$
$$= n - \mathrm{rk}(\lambda I - {}^tA) = \dim \mathrm{Ker}(\lambda I - {}^tA)$$

$\Rightarrow$ gli autovalori di A e ${}^tA$ hanno le stesse molteplicità geometriche $\Rightarrow$ per il criterio di diagonalizzabilità A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ ${}^tA$ è diag.le.

$\boxed{6}$ Poiché A è diagonalizzabile come matrice complessa, per il criterio di diagonal.tà la molteplicità di ciascun autovalore λ di A come radice del polinomio $p_A(t)$ coincide con la quantità

$$n - \mathrm{rk}(\lambda I - A),$$

dove la matrice $\lambda I - A$ è vista a coefficienti in $\mathbb{C}$. Ma il rango di una matrice è l'ordine massimo di un suo minore non nullo, e questo numero, per una matrice reale, chiaramente non dipende da se i coefficienti sono visti in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$. Quindi molteplicità algebriche e geometriche coincidono anche se A è vista come matrice reale.

E quindi, per il criterio di diagonalizzabilità, A è diagonalizzabile come matrice reale.

Un altro modo di risolvere l'esercizio è il seguente. Scriviamo $M = X + iY$. Allora per ipotesi $A \cdot (X + iY) = (X + iY) \cdot D$, dove D è una matrice diagonale reale. Uguagliando parte reale e immaginaria dei due membri si ottiene:

$$A \cdot X = X \cdot D \quad , \quad A \cdot Y = Y \cdot D$$

Questo implica che, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$A \cdot (X + tY) = (X + tY) \cdot D.$$

Ma il polinomio $p(t) = \det(X + tY) \in \mathbb{R}[t]$ non è nullo perché $p(i) = \det(M) \neq 0$, quindi $\exists\ t_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $p(t_0) \neq 0$, e quindi $X + t_0 Y$ è una matrice reale e invertibile che diagonalizza A.

$\boxed{7}$ Supponiamo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d > 0$.

Allora

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix} =$$

$$= t^2 - (a+d)t + (ad - bc),$$

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc > 0$$

Dunque gli autovalori di A sono distinti:

$$\lambda_{\pm} = \frac{a+d \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Se $v_+ = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A(v_+) = \lambda_+ v_+ \iff$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+ x \\ \lambda_+ y \end{pmatrix}$$

L'uguaglianza tra le prime coordinate in) dà

$$ax + by = \left(\frac{a}{2} + \frac{d}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)x, \iff$$

$$by = \left(\frac{d-a}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)x$$

L'uguaglianza tra le seconde coordinate dà

$$cx = \left(\frac{a-d}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)y$$

Poiché $a \geq d$ oppure $a < d$, le coordinate di v_+ sono concordi. Facendo i conti con λ_- e v_- si ottengono le equazioni:

$$by = \left(\frac{d-a}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)x, \quad cx = \left(\frac{a-d}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)y$$

Quindi le coordinate di v_- sono discordi.

$\boxed{9(a)}$ $\quad P_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 3$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{array}$$

A ha autovalori reali e distinti $\Rightarrow$ è diagonalizzabile sia su $\mathbb{C}$ che su $\mathbb{R}$.

$\boxed{9(b)}$ $$p_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 .$$

$\lambda = 1$ unico autovalore reale, $m.a.(1) = 2$.

$$m.g.(1) = 2 - rk\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 .$$

Queste molteplicità valgono sia su $\mathbb{R}$ che su $\mathbb{C}$, quindi A non è diagonalizzabile né su $\mathbb{R}$ né su $\mathbb{C}$.

Alternativamente, si può osservare che, essendo $\underline{1}$ l'unico autovalore di A, se A fosse diagonalizzabile allora, per qualche matrice $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ invertibile,

$$A = M^{-1} I M = M^{-1} M = I .$$

Ma $A \neq I$, e dunque A non può essere diagonalizzabile.

$\boxed{9(c)}$ $$p_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 1 \\ -1 & t-2 & 0 \\ -1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} =$$

sviluppo risp. alla III riga

$$= (-1)\cdot(2-t) + (t-2)(t^2-2t-1)$$

$$= t(t-2)^2$$

$\Rightarrow$ Autovalori: $\lambda = 0$ $\lambda = 2$

m.a. $= 1$ m.a. $= 2$

Abbiamo

$$1 \leq \text{mg.}(0) \leq \text{m.a.}(0) = 1 ,$$

quindi m.g.$(0) = 1$. Inoltre,

$$2 \cdot I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ha rango 2,

quindi m.g.$(2) = 3 - rk(2I - A) = 1$.

Dunque A non è diagonalizzabile né su $\mathbb{C}$ né su $\mathbb{R}$.

$\boxed{9(d)}$ $$P_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} =$$

sviluppo risp. II colonna

$$= (t-2) \cdot (t^2 + 1)$$

$\Rightarrow$ gli autovalori sono $2, i, -i$. Poiché sono distinti ma non reali, A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ ma non su $\mathbb{R}$.