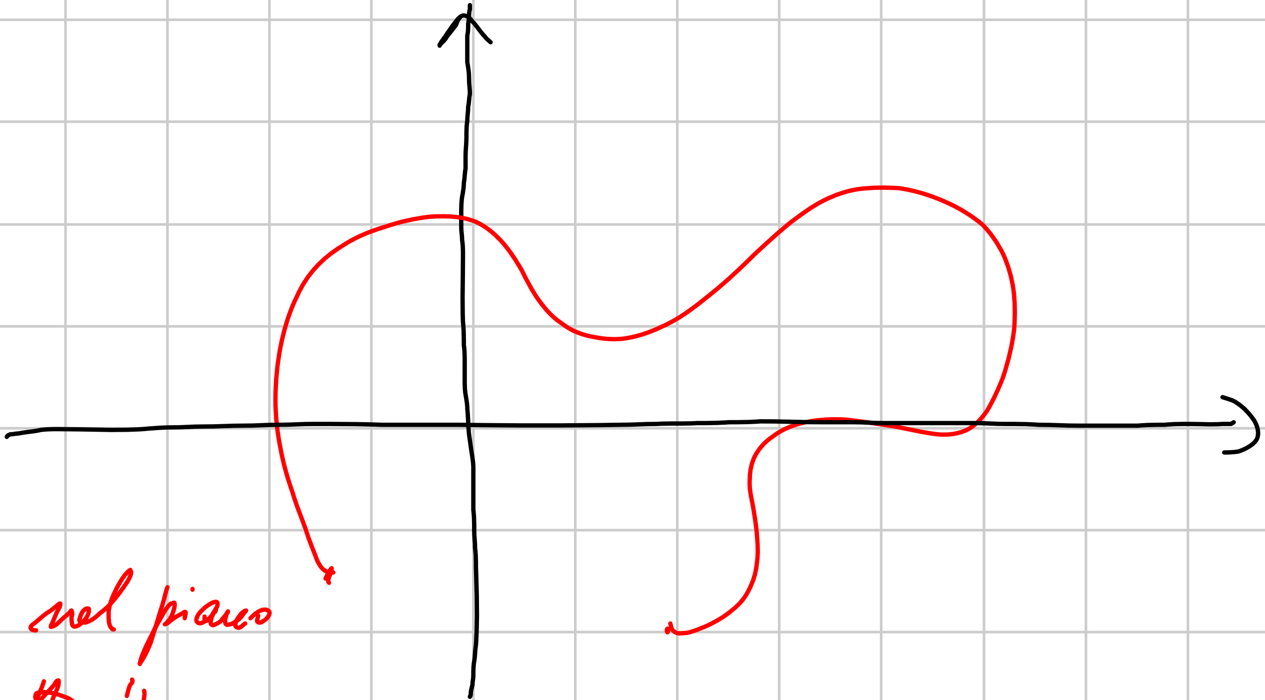
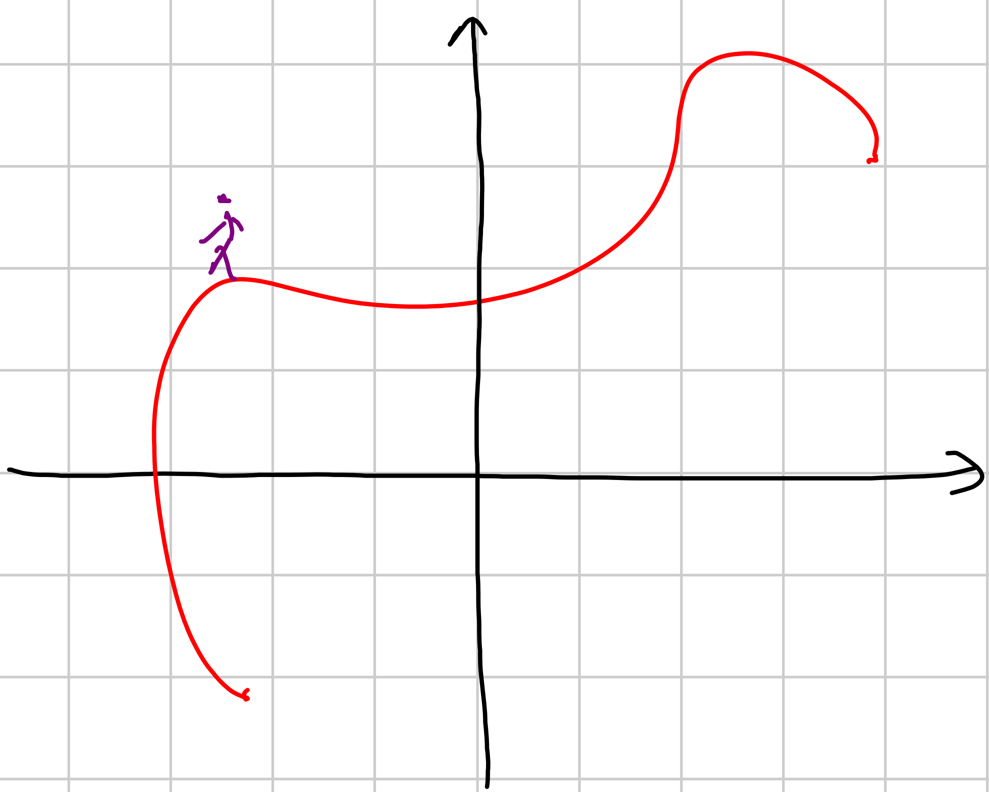
Geometria 9/5/14

CURVE

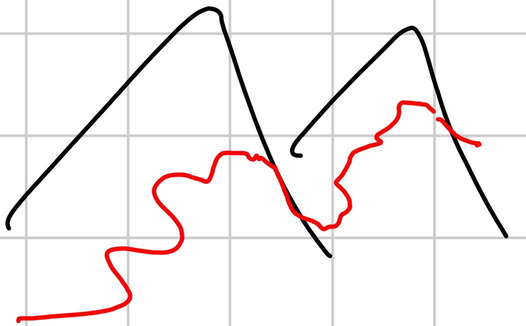


"oggetto
1-dimensionale nel piano
anche non dritto"



"un oggetto che si può percorrere camminando"

(anche in $\mathbb{R}^3$ e non solo in $\mathbb{R}^2$:



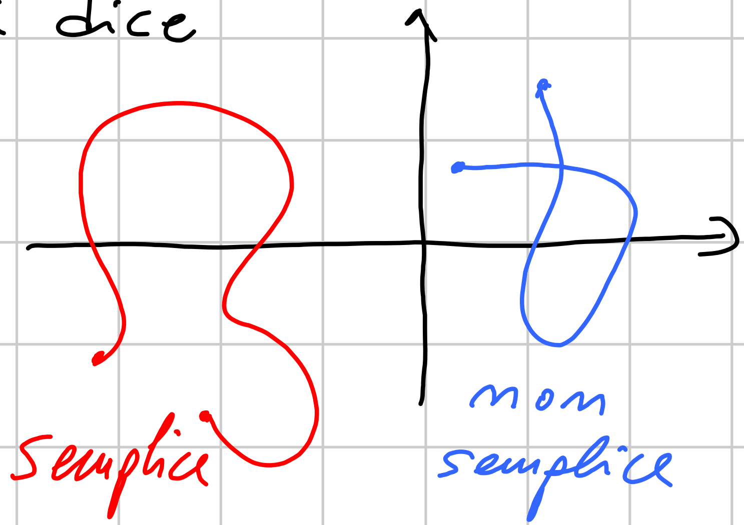
)

Matematicamente chiamo "curva" la legge di percorrenza del sentiero.

Def: una curva in $\mathbb{R}^n$ è una funzione $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua.

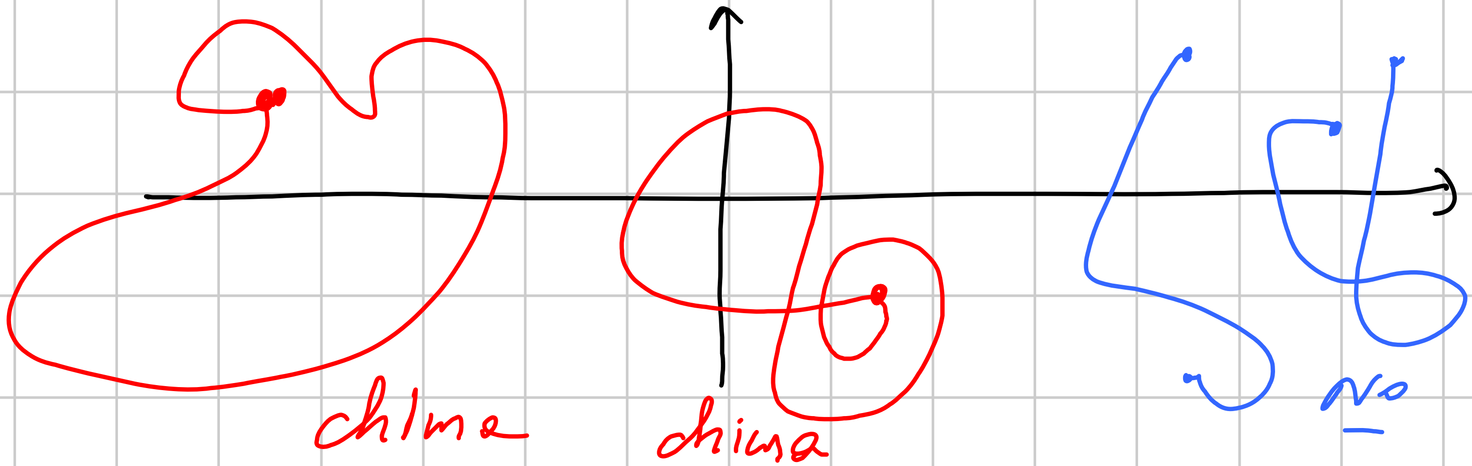
(eventualmente invece che $[a,b]$ anche (a,b) o $(a,b]$ o $[a,b)$ o $(-\infty,b)$ o ... $\mathbb{R}$).

Def: $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice

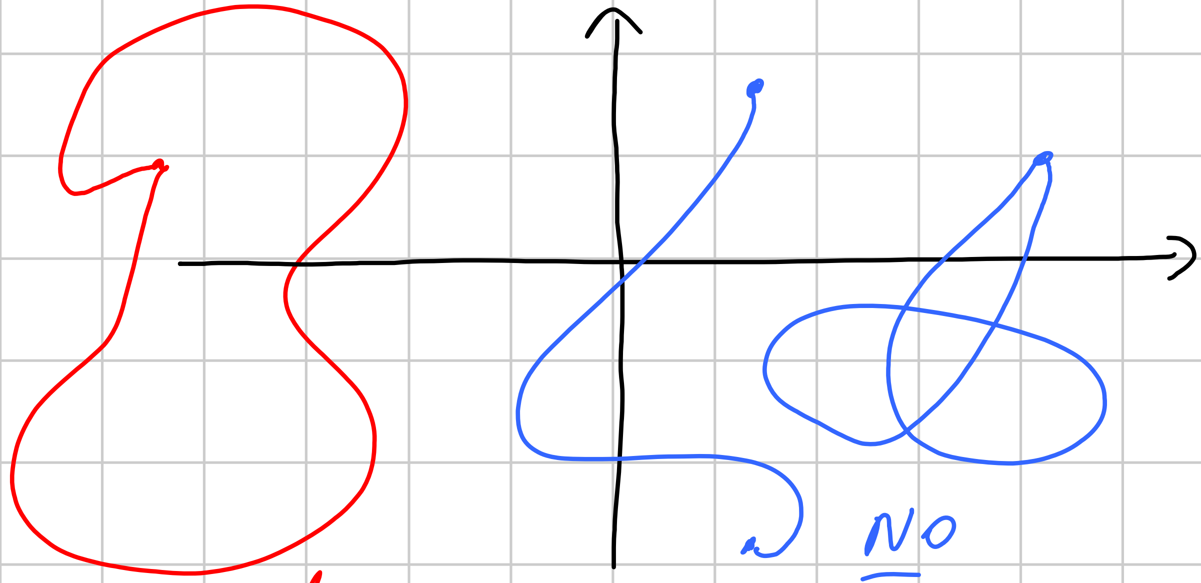


- semplice se è iniettiva

- chiusa se $\alpha(b) = \alpha(a)$

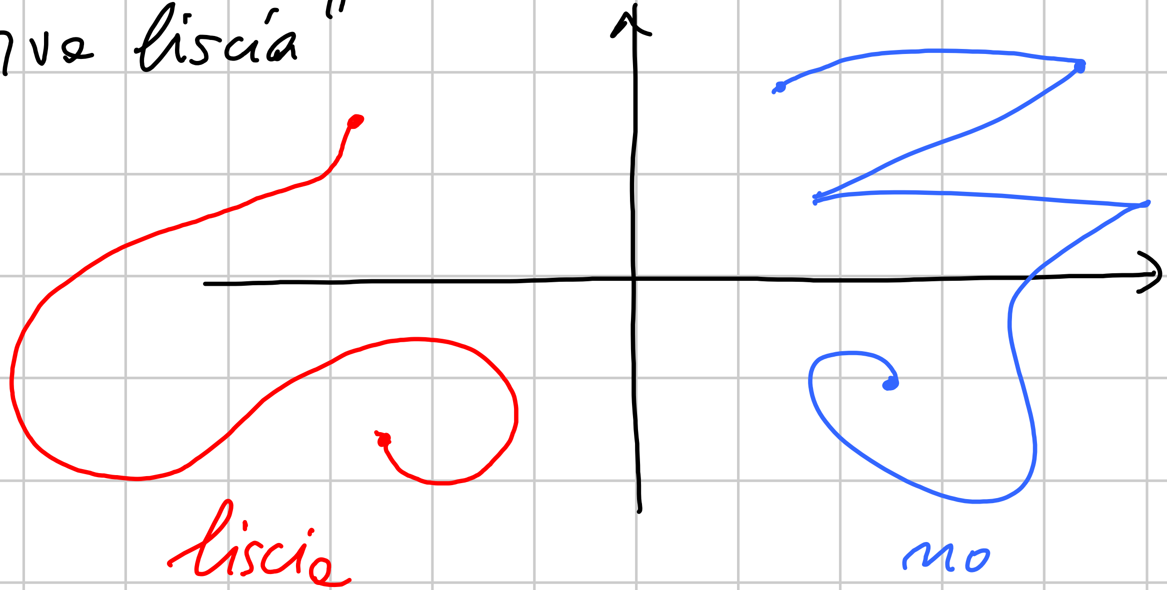


- semplice e chiusa se è chiusa e la restrizione ad $[a,b)$ è iniettiva:



semplice e chiusa

"Curva liscia"



"ovunque dotata di retta tangente".

Q: Basta chiedere che α sia derivabile? Cioè derivabili le sue componenti

A : NO : Es:

$\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, $\alpha(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$

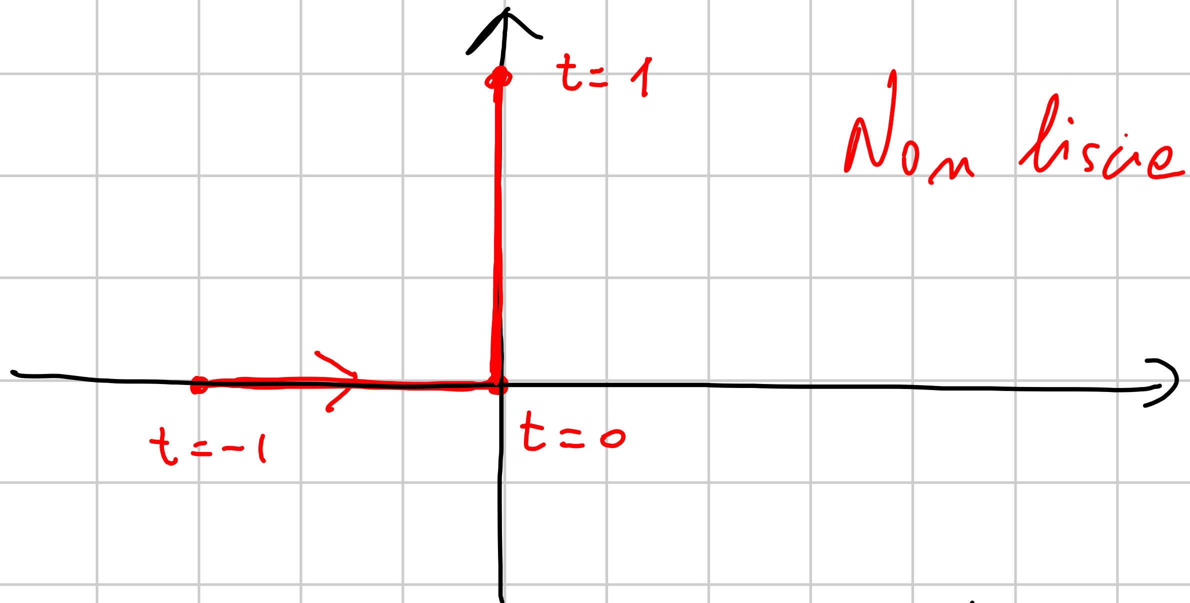
$$\alpha(t) = \begin{cases} (-t^{1000}, 0) & t \in [-1,0] \\ (0, t^{1000}) & t \in [0,1] \end{cases}$$

le componenti di α sono infinitamente derivabili su $[-1,0) \cup (0,1]$ e

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (-1000t^{999}, 0) & t<0 \\ (0, 1000t^{999}) & t>0 \end{cases}$$

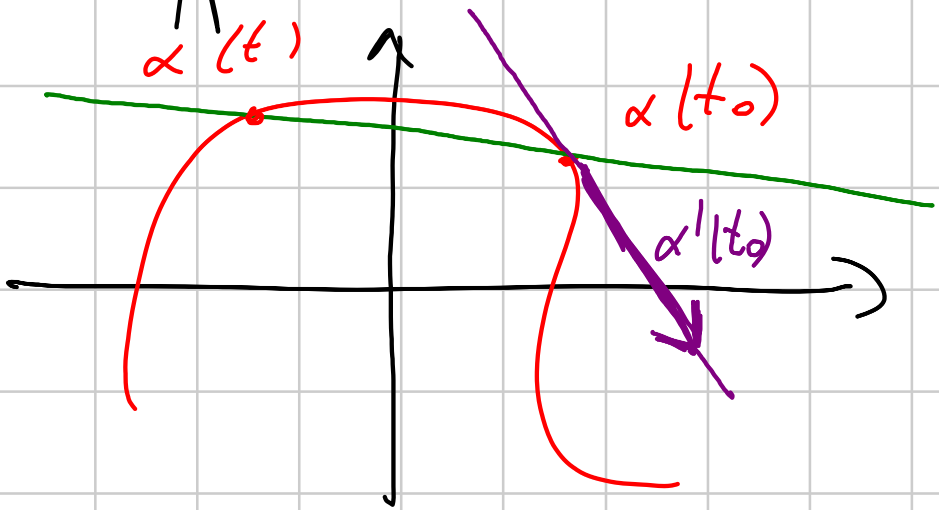
$$\lim_{t \to 0^+} \alpha'(t) = \lim_{t \to 0^-} \alpha'(t) = (0,0) \Rightarrow \exists \alpha'(0)$$

inoltre è derivabile qqq in 0.



Def: α si dice regolare se esiste $\alpha'(t)$ e $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$.

Prop: Se α è regolare e $t_0 \in [a,b]$ il limite per $t \to t_0$ della retta passante per $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$ esiste ed è la retta con giacitura $\mathrm{Span}(\alpha'(t_0))$. Inoltre è l'unica retta con "contatto doppio" con α in t_0.



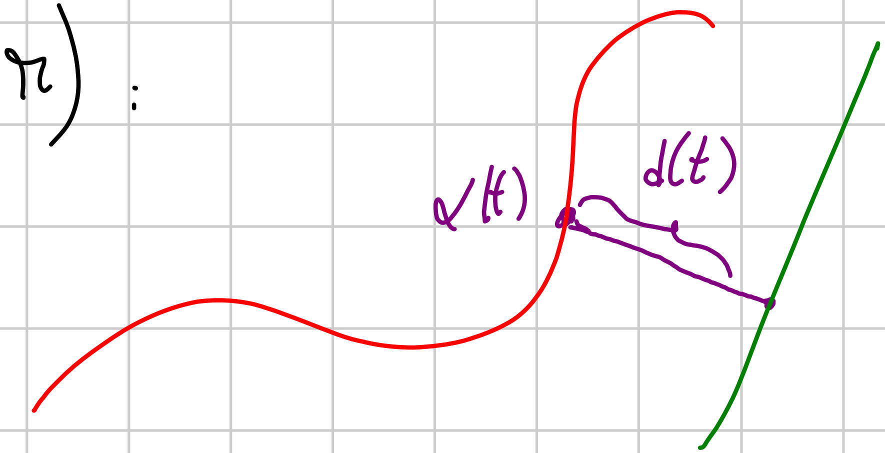
Dim: La retta per $\alpha(t)$ e $\alpha(t_0)$ è

$$\alpha(t_0) + \mathrm{Span}(\alpha(t) - \alpha(t_0))$$

$$= \alpha(t_0) + \text{Span}\left(\underbrace{\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}}_{\text{tende a } \alpha'(t_0)\,.}\right)$$

Secondo punto: Fisso una retta $\pi: ax+by+c=0$.

$d(t) = \text{distanza}(\alpha(t), \pi)$:



r passa per $\alpha(t_0) \iff \exists$ contatto tra r e α in $\alpha(t_0)$

$\iff d(t_0) = 0$.

r ha contatto doppio con α in $\alpha(t_0)$ se

$d(t_0) = 0$ e $d'(t_0) = 0$.

Proviamo che ciò accade se e solo se r è la tangente $\alpha(t_0) + \mathrm{Span}(\alpha'(t_0))$.

Posso supporre $\sqrt{a^2+b^2} = 1$. Se $\alpha(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$

ho $d(\alpha(t), r) = | a \cdot X(t) + b \cdot Y(t) + c |$

$d(t_0) = 0 \iff c = -aX(t_0) - bY(t_0)$

dati a, b trovo c che lo soddisfa

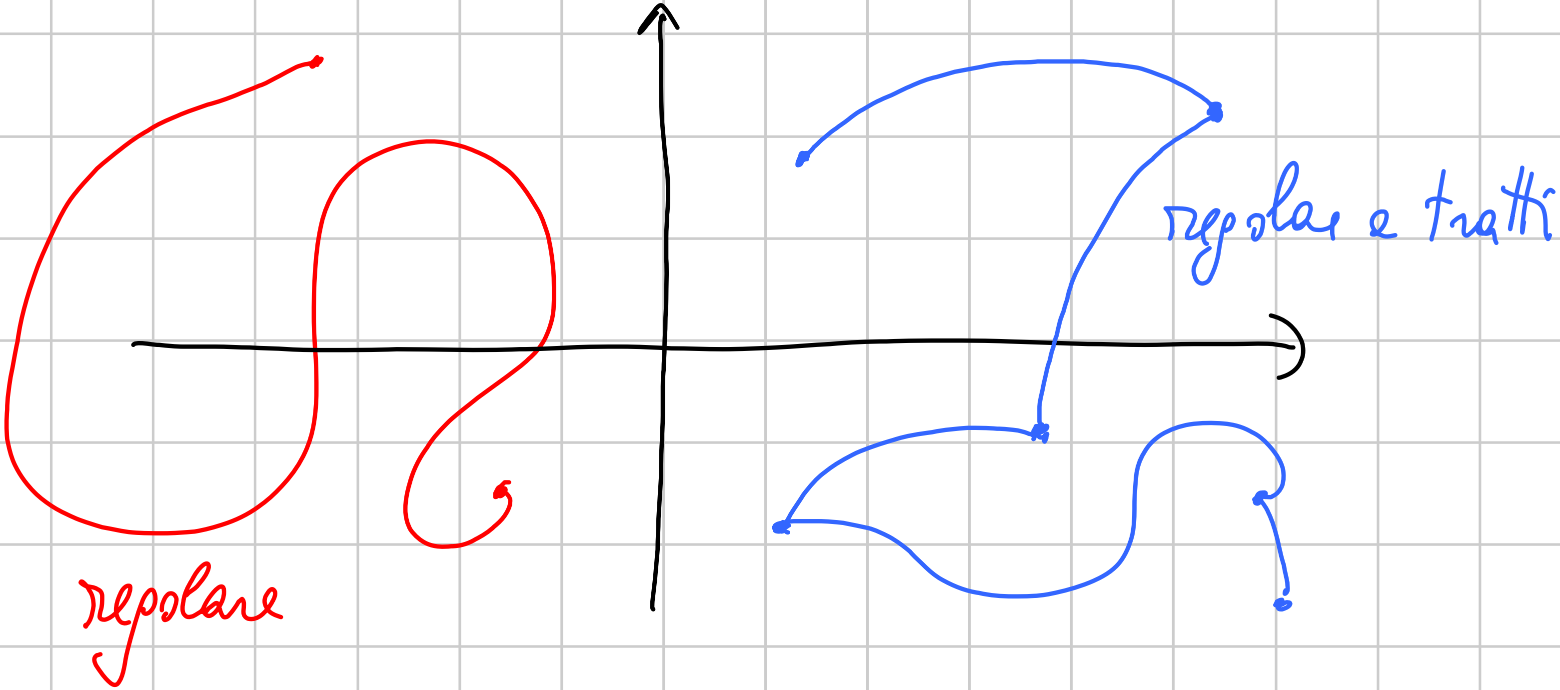
$d'(t_0) = 0$ "$\iff$" $\pm (a \cdot X'(t_0) + b \cdot Y'(t_0)) = 0$

Ciò significa esattamente che la giacitura di r è

$$\begin{pmatrix} X'(t_0) \\ Y'(t_0) \end{pmatrix} = \alpha'(t_0) \; \_$$

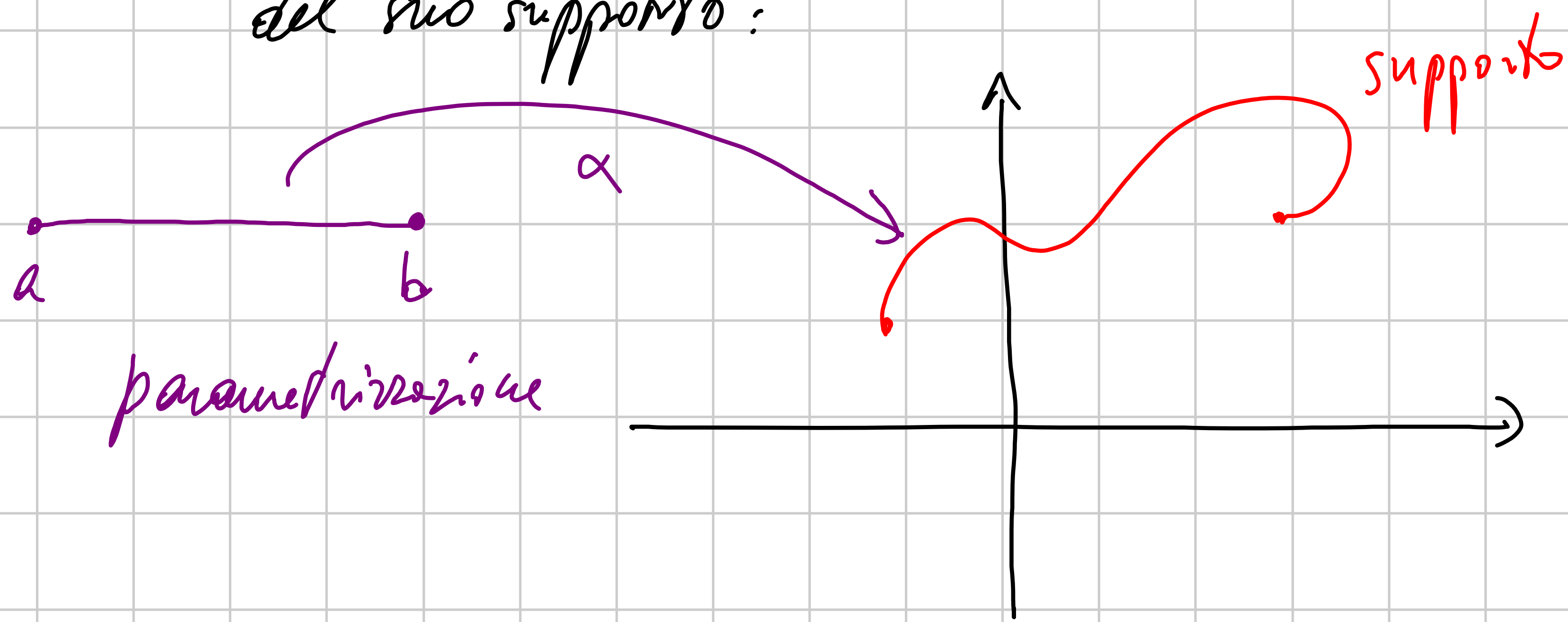
$\blacksquare$

Parleremo sempre di curve regolari o almeno "regolari a tratti": $[a,b]$ si suddivide in intervalli su cui α è regolare:

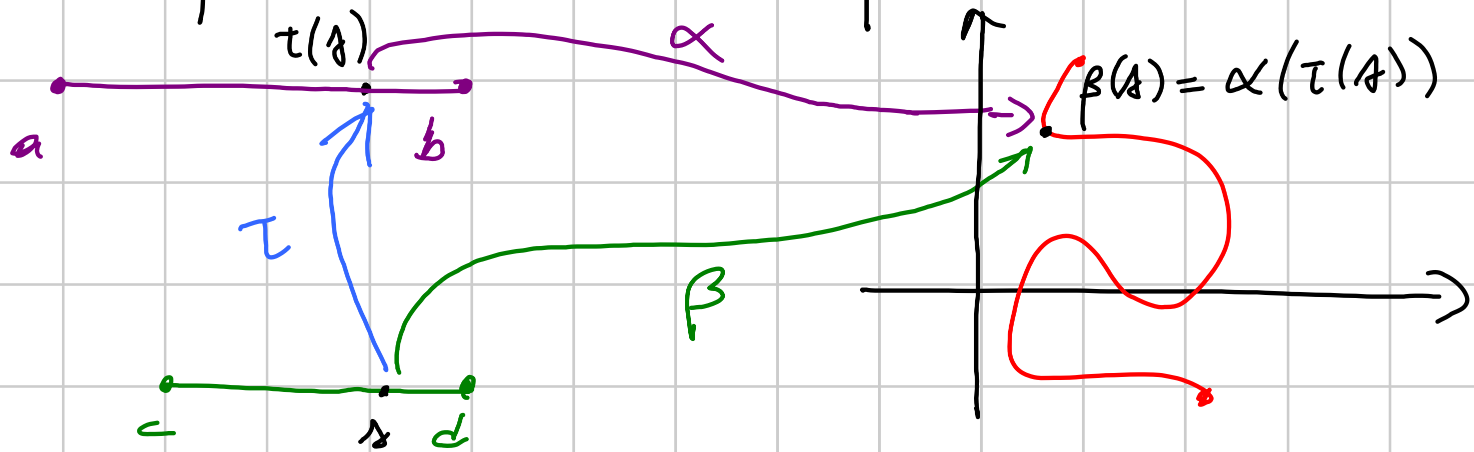


Def: chiamo supporto della curva $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ la sua immagine $\alpha([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$.

Chiamo α una parametrizzazione del suo supporto:

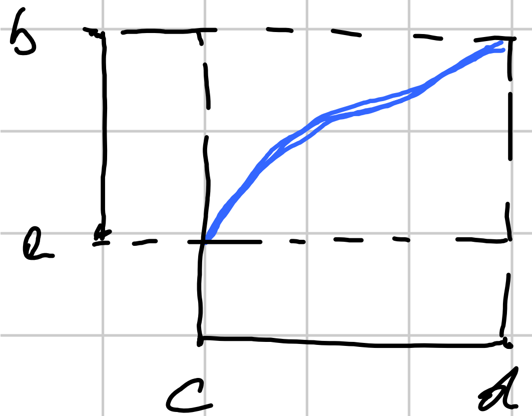


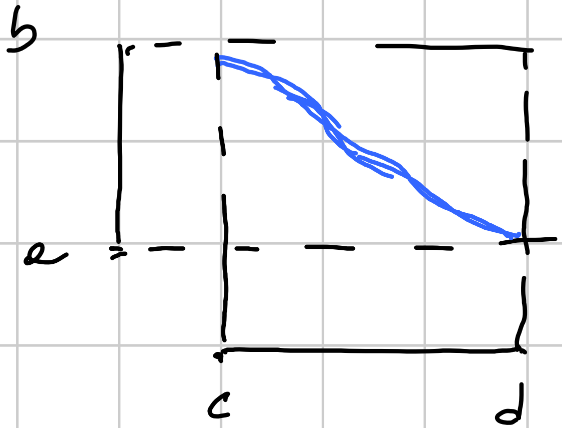
Def: diciamo che una curva $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ è ottenuta da $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tramite cambiamento di parametro se esiste $\tau : [c,d] \to [a,b]$ biettiva derivabile e con inversa derivabile t.c. $\beta = \alpha \circ \tau$ cioè $\beta(s) = \alpha(\tau(s))$ $\forall s \in [c,d]$:



Oss: in tal caso α e β hanno lo stesso supporto (ma non solo).

Oss: una funzione bijettiva tra due intervalli è o crescente o decrescente:





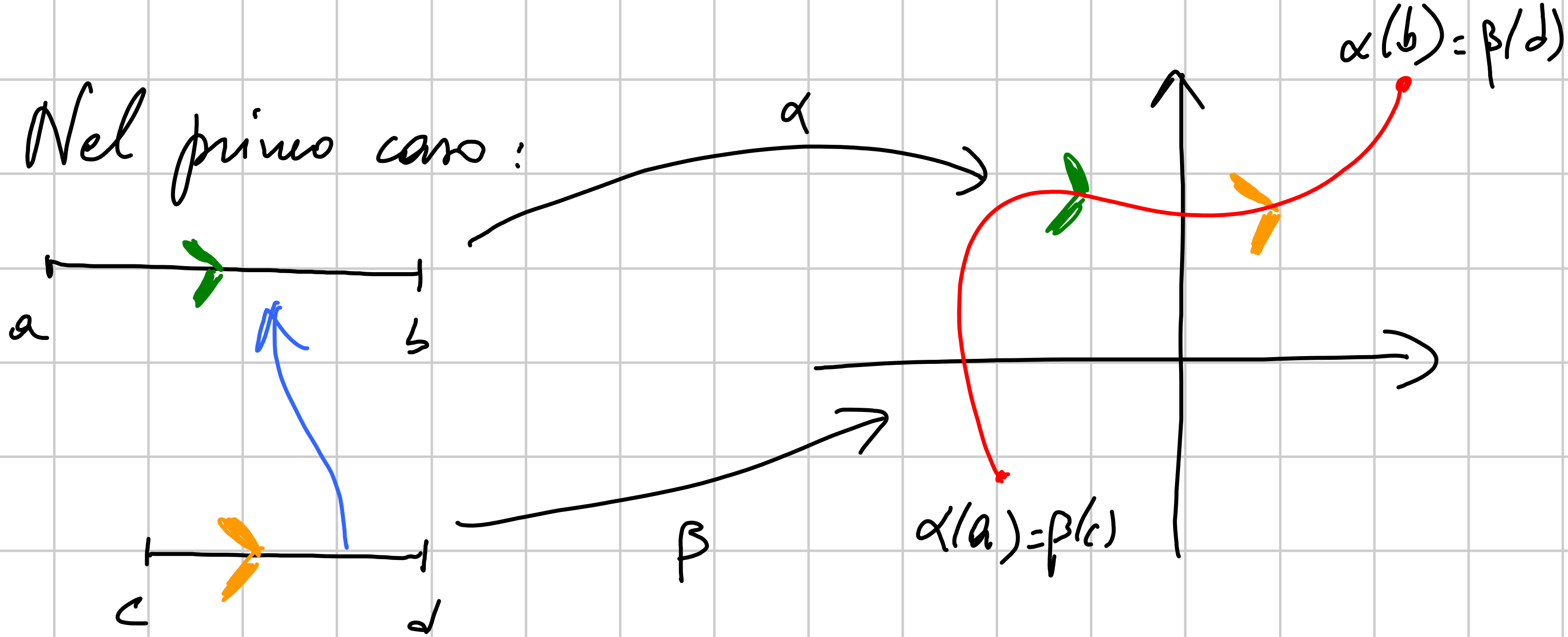
$\tau(c) = a, \ \tau(d) = b$

$\tau'(s) > 0 \quad \forall s$

$\tau(c) = b, \ \tau(d) = a$

$\tau'(s) < 0$

Nel primo caso:



Dirò che il cambio di variabili τ preserva un verso di percorrenza sulla curva; chiamerò orientazione una scelta del verso di percorrenza: