Geometria 10/4/14

S $\sim$ equiv. se è rifl. simm. e trans.
cioè: ripartisce S in sottoinsiemi disgiunti (classi di equiv)

Quoziente: $S/_\sim$ = l'insieme delle classi di equiv.

(Un punto di $S/_\sim$ è una classe di equiv.).

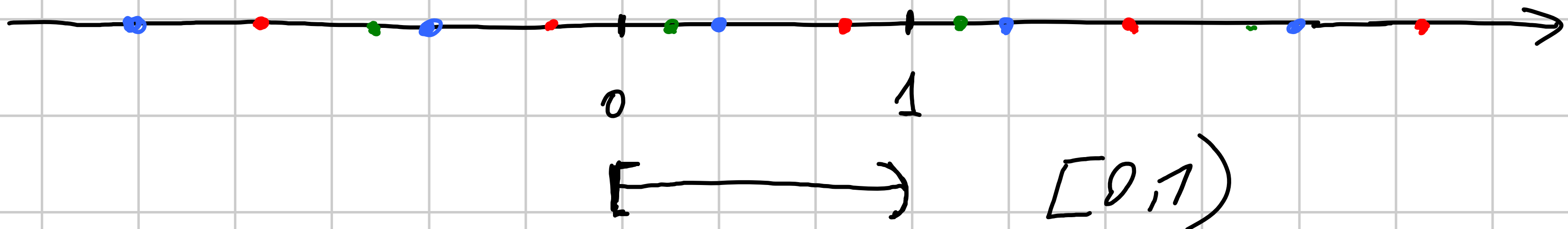
Proiez. nel quoziente $\quad S \longrightarrow S/_\sim$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \longmapsto [x]$

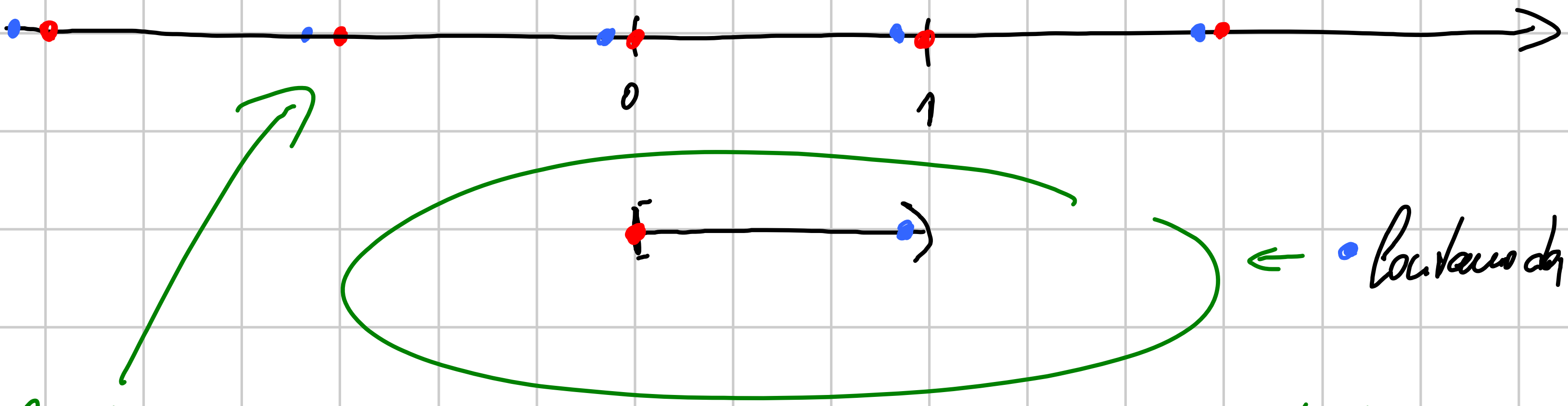
Descrizioni di $S/_\sim$:

- insieme di rappresentanti
- nomi delle classi

<u>Esempio</u>: su $\mathbb{R}$, $x \sim y$ se $y - x \in \mathbb{Z}$



$[0,1)$ insieme di rappr.



← ● lontano da ●

le classi sono vicine

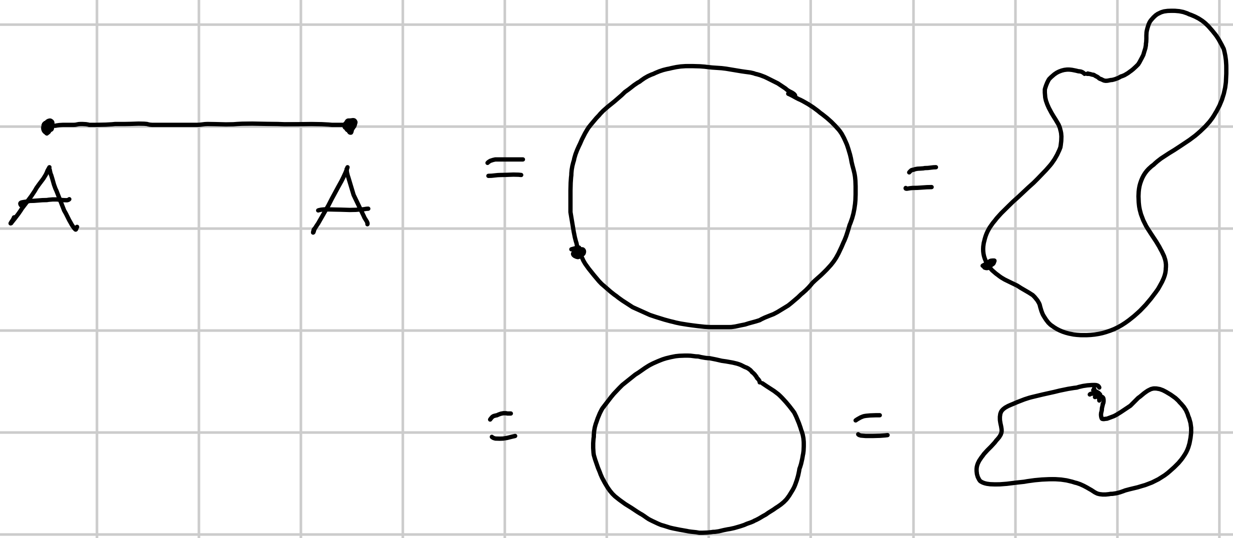
$\Longrightarrow$ $[0,1)$ non dà una immagine fedele di $\mathbb{R}/\sim$.

Rimedio: prendo $[0,1]$ = 

(insieme di rappresentanti leggermente sovrabbondante)

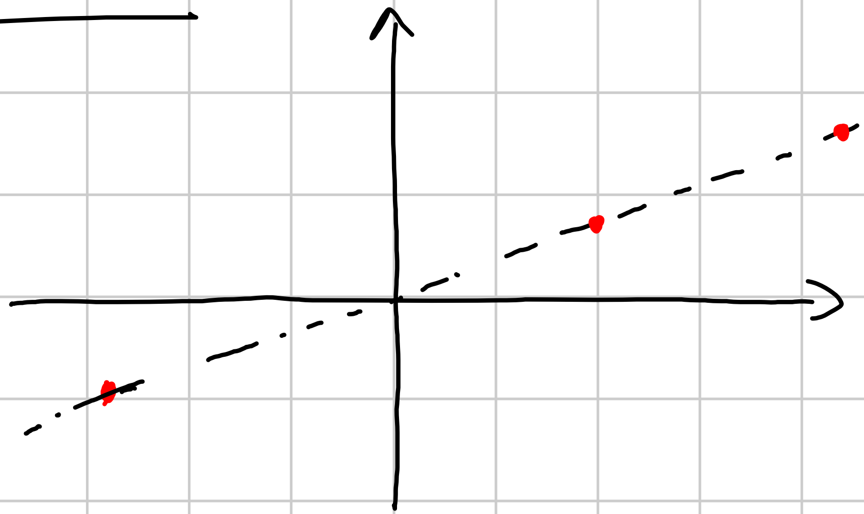
e mi ricordo che gli estremi sono uguali:

$\mathbb{R}/\sim$ =



Def: Sia V uno sp. vett. su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ quasi sempre; un esempio con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) con $\dim_{\mathbb{K}}(V) \geq 1$. Definisco su $V \setminus \{0\}$ la relaz. $x \sim y$ se $\exists k \in \mathbb{K}$ t.c. $y = k \cdot x$.

Fatto: è una relaz. di equiv.:



(poiché $x \sim y$ precisamente quando x e y stanno su una stessa retta di V per 0) .

Ia formule :

rifl: $x \sim x$? Si: $x = 1 \cdot x$

simm: $x \sim y \overset{?}{\Longrightarrow} y \sim x$.

So che $y = k \cdot x$ ma $y \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$

$\Longrightarrow x = \frac{1}{k} \cdot y \Longrightarrow y \sim x$. Ok

trans: $x \sim y,\ y \sim z \Longrightarrow x \sim z$?

So che $y = k \cdot x$, $z = h \cdot y$ $(k, h \in \mathbb{K})$

$\Longrightarrow z = (h \cdot k) \cdot x \Longrightarrow x \sim z$ Ok .

Da questo argomento segue che

$$x \sim y \iff \exists k \neq 0 \text{ t.c. } y = k \cdot x$$

Inoltre: le classi di equiv. sono le rette per O in V private dell'origine.

Def: chiamo spazio proiettivo associato a V il quoziente $(V \setminus \{0\})/\sim$, indicato $\mathbb{P}(V)$.

<u>Oss:</u>

$$\mathbb{P}(V) = \left\{ \begin{matrix} \text{rette per } O \text{ in} \\ \bar{V} \text{ private di } O \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{rette per } O \text{ in } \bar{V} \right\}$$

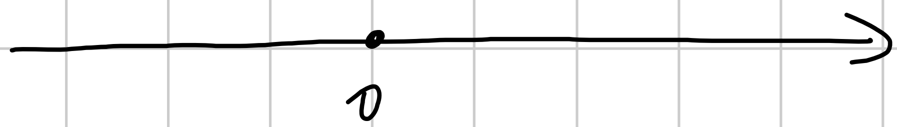
Cioè:
- un punto di $\mathbb{P}(V)$ è una retta per O in $\bar{V}$
- $\mathbb{P}(V)$ si ottiene da V identificando a un solo punto ogni retta per O in $\bar{V}$ (rette distinte danno punti distinti).

Def: chiamo spazio proiettivo n-dim. su $\mathbb{K}$

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$$

cioè $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ = l'insieme delle rette per O in $\mathbb{K}^{n+1}$.

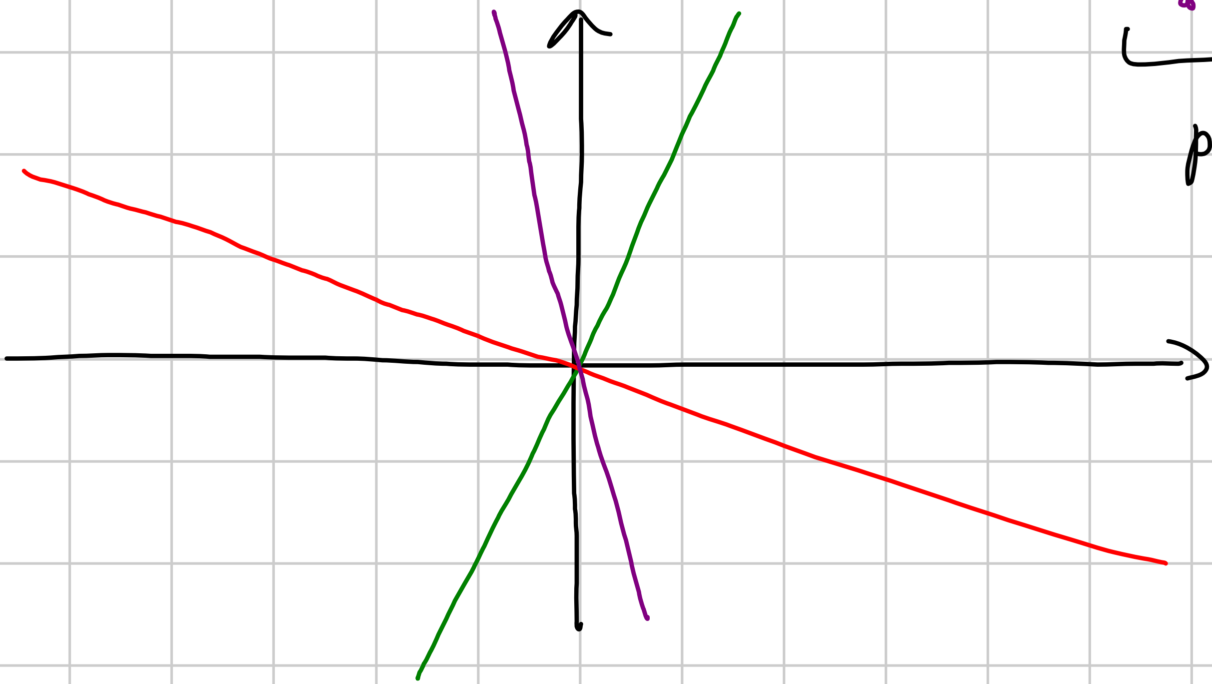
$\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ $\qquad$ $\mathbb{R} =$



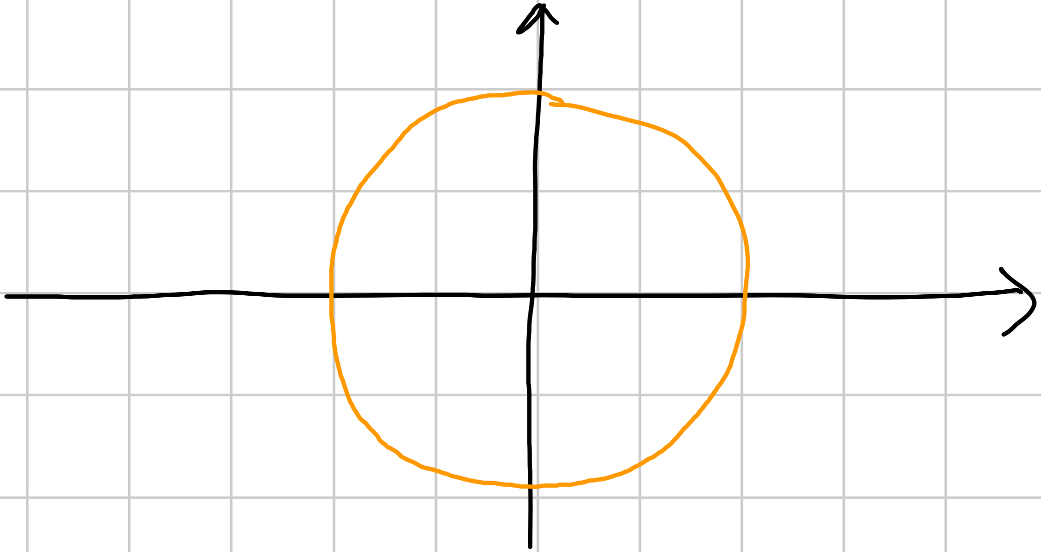
$\Rightarrow \mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ = un punto

(anzi $\mathbb{P}^0(\mathbb{K})$ = un punto).

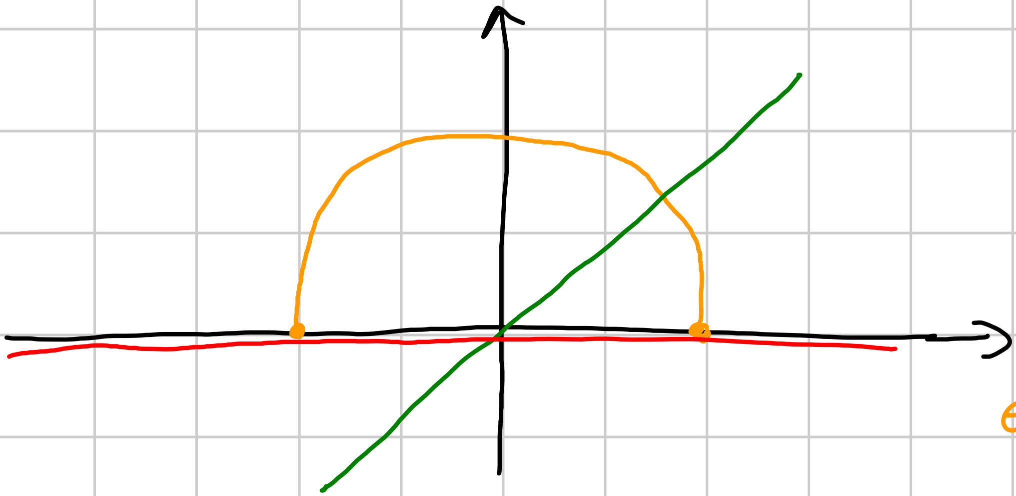
$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$: rette in $\mathbb{R}^2$



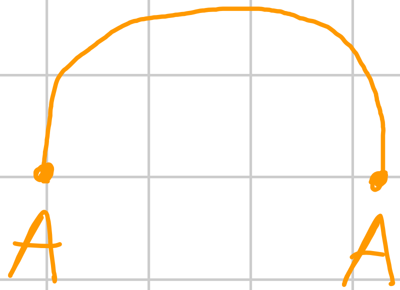
$$\underbrace{\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot}_{\text{punti di } \mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$$

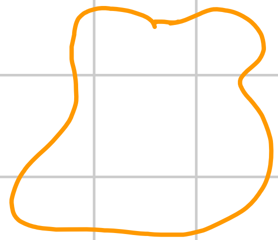


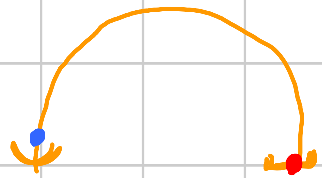
$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ incontra ogni classe di equiv in due punti



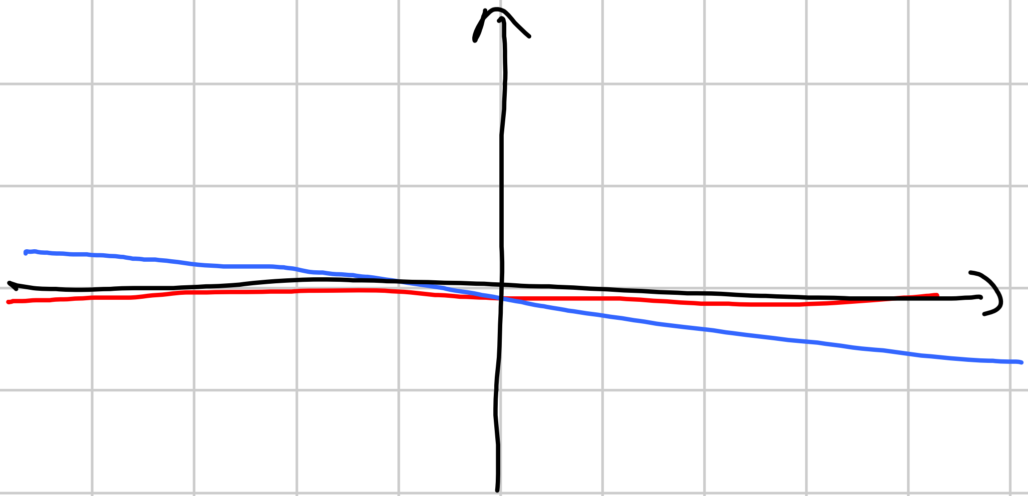
$\{x \in S^1 : x_2 \geq 0\}$ incontra tutte le classi di equiv. in un solo punto, tranne ______ che incontra nei due suoi estremi.

$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) =$ 

$=$ 

(Volendo: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) =$ 

ma la figura non è significativa perché non vedo che • è vicina a • mentre:

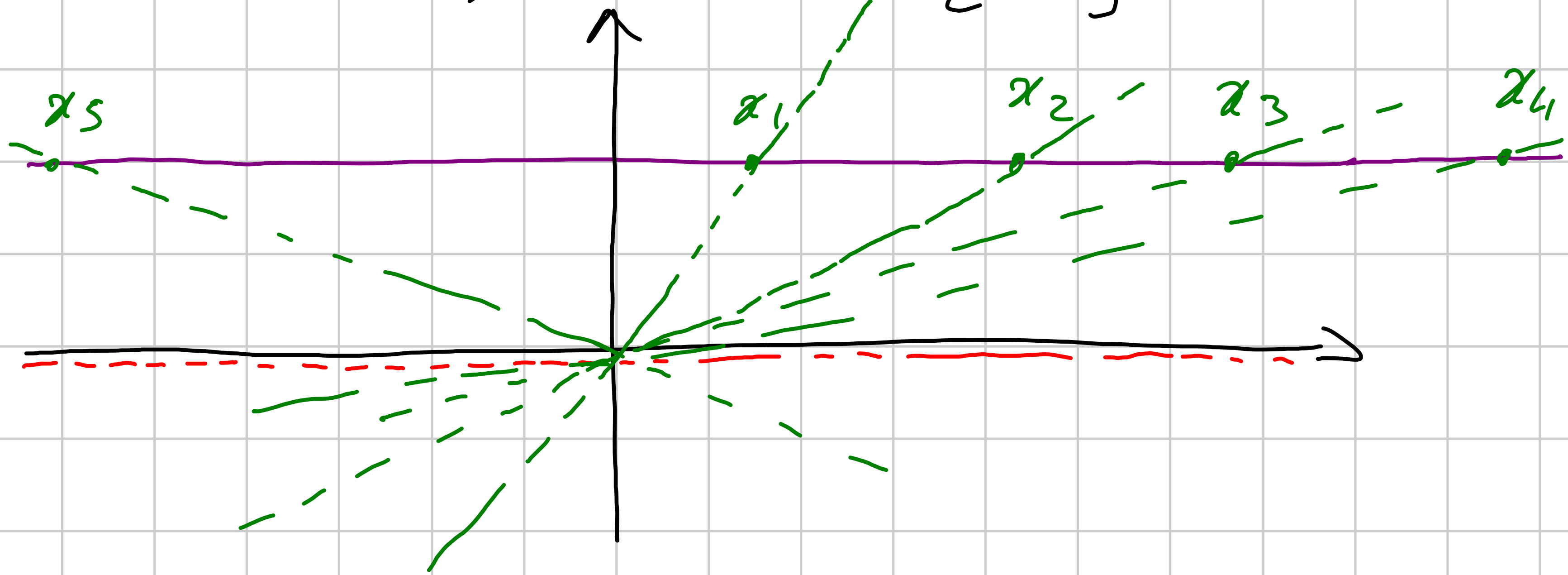


sono vicine.

Oppure: identifico $\mathbb{R}$ alla retta di ordinata 1 in $\mathbb{R}^2$:

$\mathbb{R}$ incontra ogni classe di equiv. in un solo punto tranne ________ che non incontra:

$$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{ \bullet \}$$

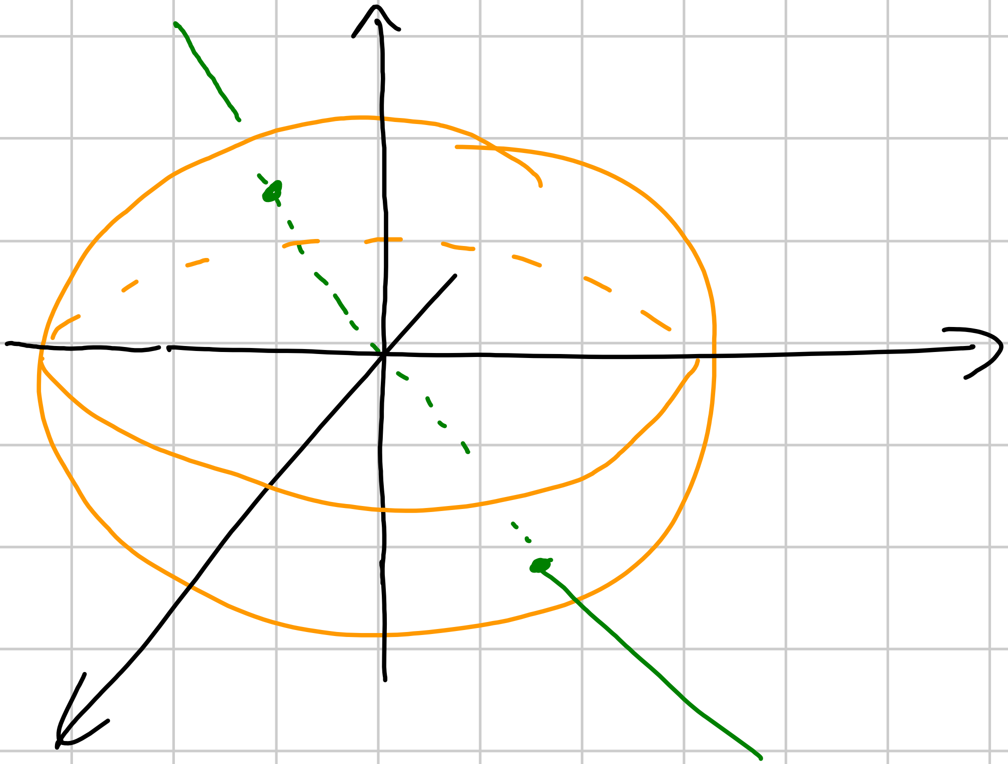


Un punto x di $\mathbb{R}$ è tanto più vicino a • quanto più $|x|$ è grande: dunque è naturale chiamare ∞ il • _ Mondo:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

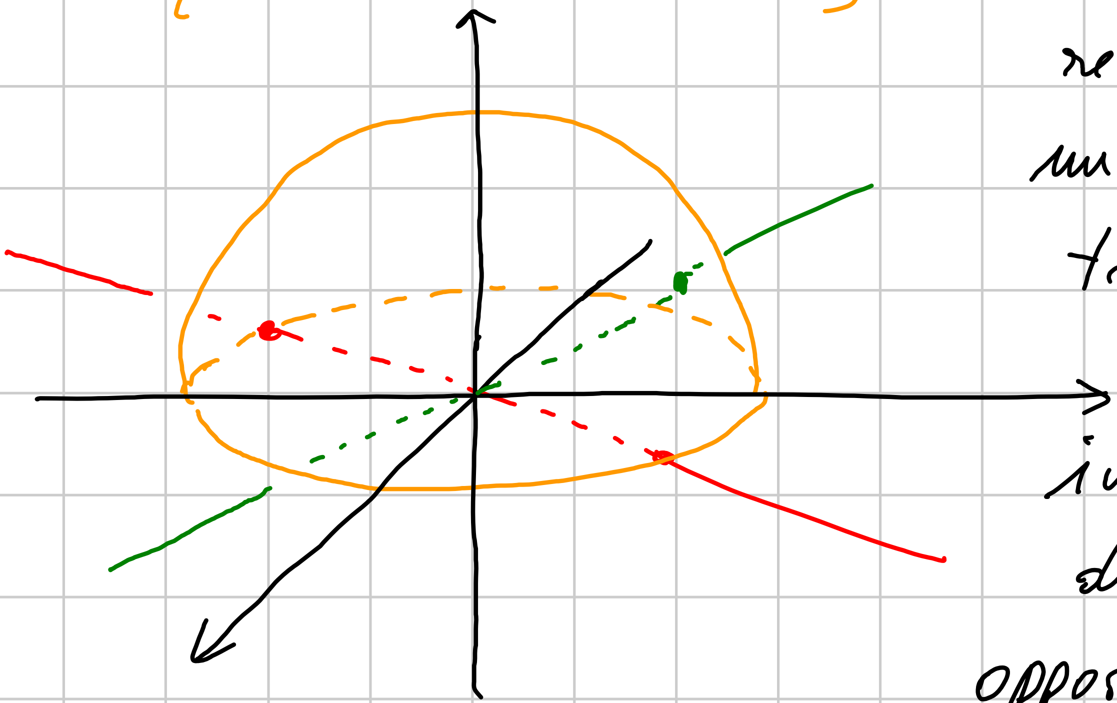
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ = piano proiettivo reale = rette per 0 in $\mathbb{R}^3$.

$$S^2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1 \}$$



incontra
ogni classe
di equiv.
in due punti!

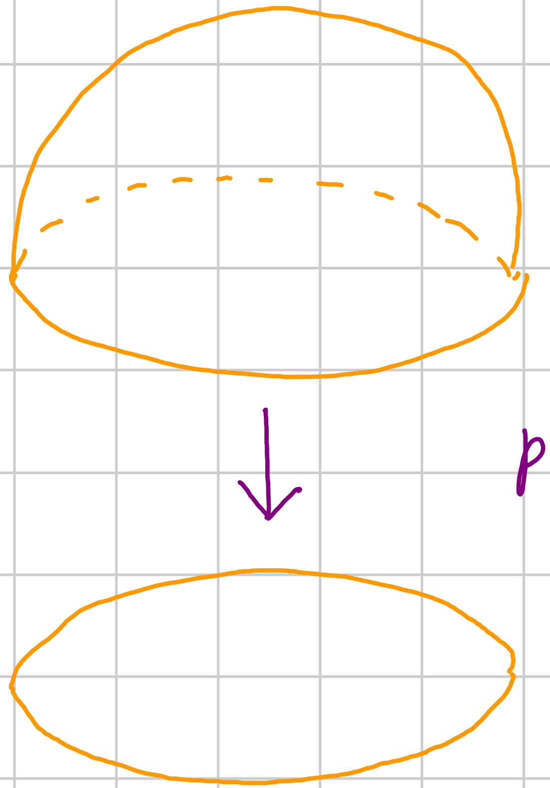
Invece: $\{x \in S^2 : x_3 \geq 0\}$



incontra ogni retta per O in un solo punto, tranne quelle orizz. che incontra in due punti opposti fra loro.

$\Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si ottiene da un emisfero identificando fra loro i punti opposti del bordo.

Ora:



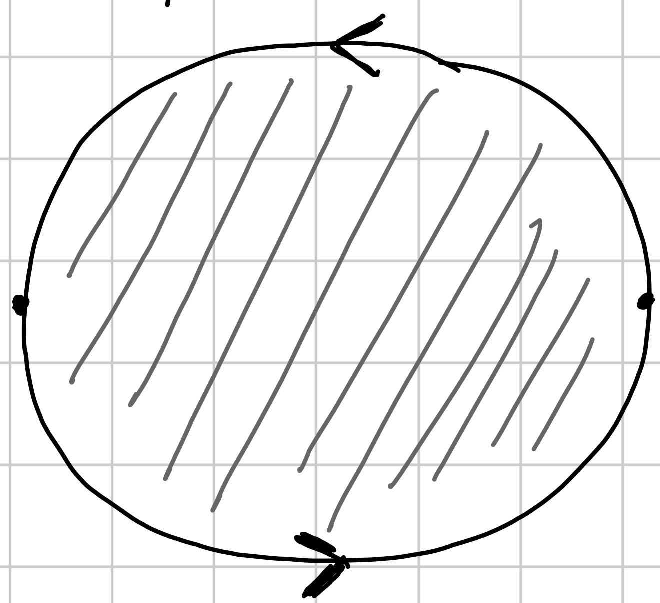
proiet. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}$

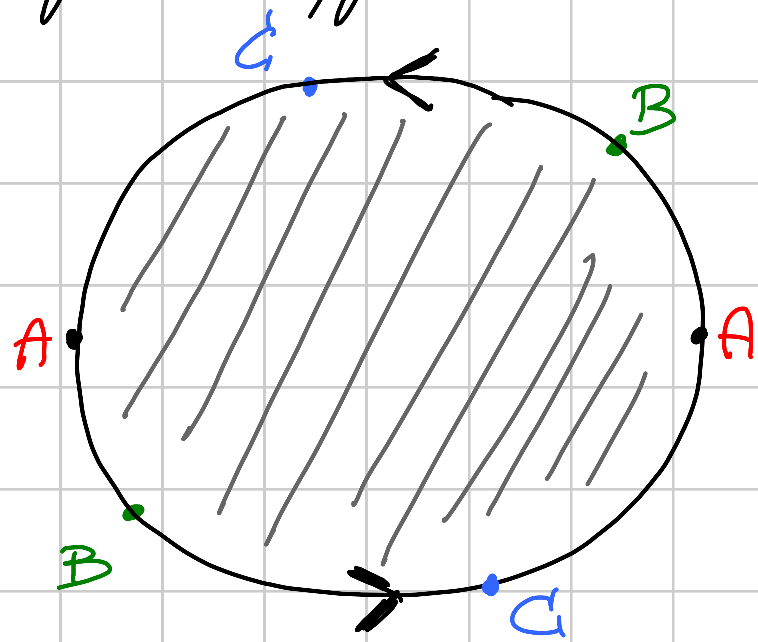
è biiezione dall'emisfero al disco.

Inoltre sulle circonf. di bordo la

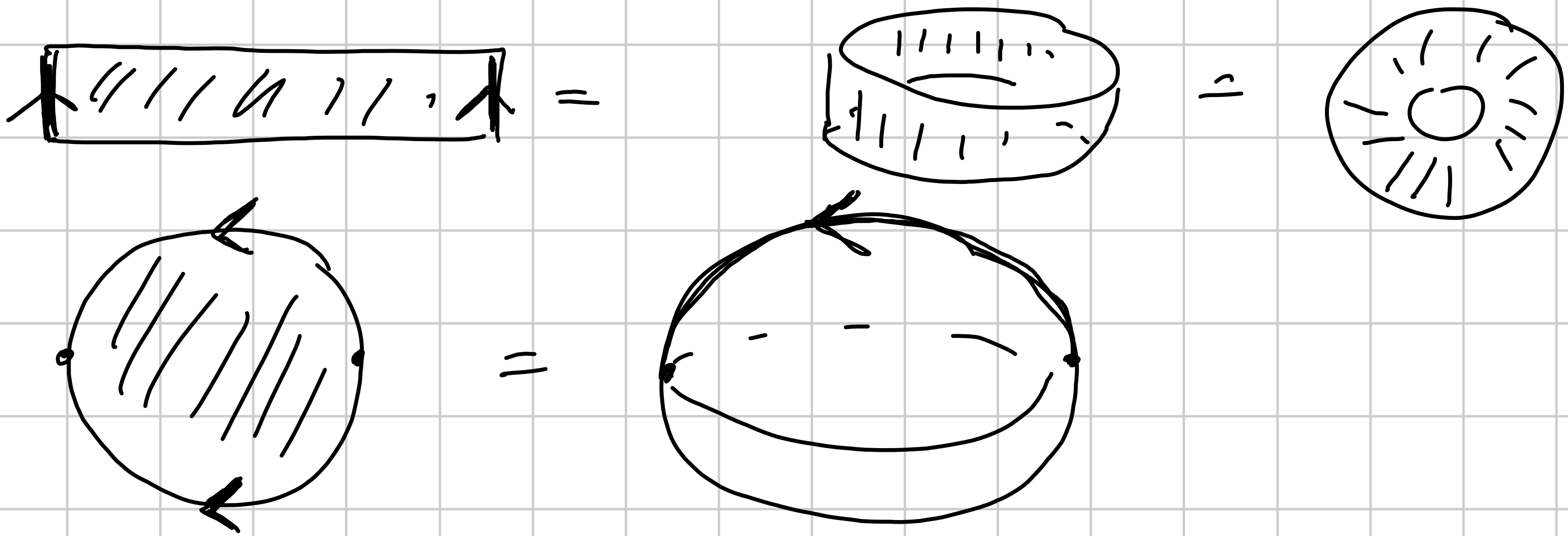
proiez. è l'identità $\Rightarrow$ quindi le identificaz. da fare per ottenere $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono come prima -

Morale: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si ottiene dal disco identificando fra loro i punti opposti del bordo:

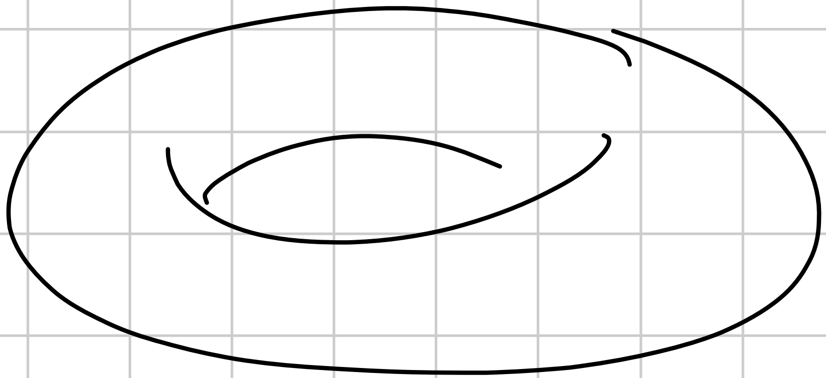


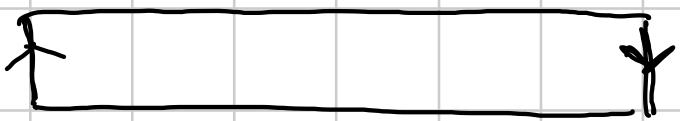


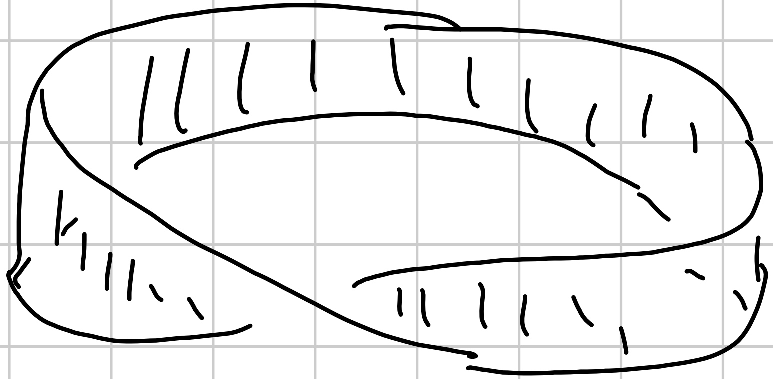
Fatto: questo oggetto non si può realizzare in $\mathbb{R}^3$. Altri oggetti ottenuti identificando pezzi di bordo di oggetti piani invece sì!



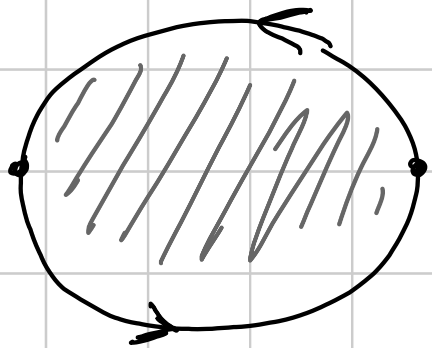
toro





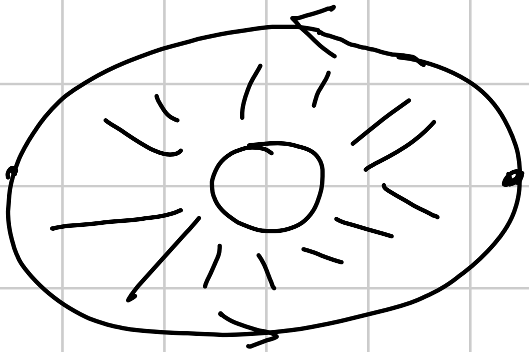


nastro di Möbius

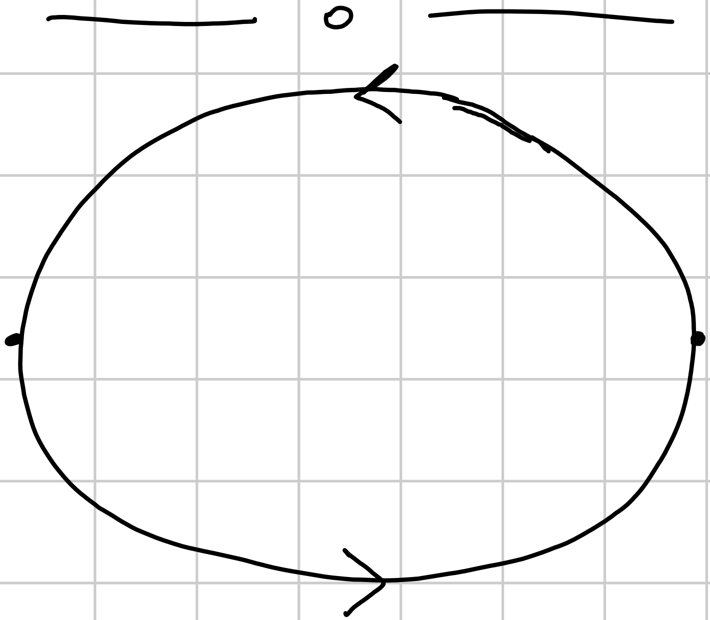
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) =$ 

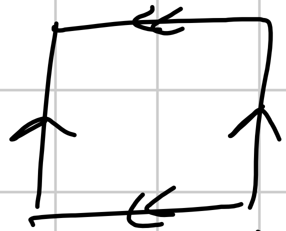
non si realizza in $\mathbb{R}^3$

Esercizio:



= Möbius





toro