Geometria 19/3/14

V sp. vett. su $\mathbb{R}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ prod. scal.

Def: $f : V \to V$ lineare si dice **isometria** se $\langle f(v) | f(w) \rangle = \langle v | w \rangle$ $\forall v, w \in V$

Oss: se f è isometria allora
$\|f(v)\| = \|v\| \quad \forall v$

$\Rightarrow \quad d(f(v), f(w)) = d(v,w) \quad \forall v,w$

cioè "f conserva le distanze".

Oss: siccome $\|\cdot\|$ determina $\langle \cdot | \cdot \rangle$, basta chiedere che f preservi la norma per avere che f preserva il prod. scal.

Caso $\mathbb{R}^n$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$: $M \in \mathcal{M}_{n \times n}$ è isometria se

$$\langle Mx | My \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x,y$$

cioè $\quad {}^t x \cdot ({}^t M \cdot M) \cdot y = {}^t x \cdot y \quad \forall x, y$

cioè $\quad {}^t M \cdot M = I_n$. In tal caso diremo che M è una matrice ortogonale.

Fatto: per $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ sono fatti equiv:

(1) M preserva il $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ (M è isometria)

(2) ${}^t M \cdot M = I_n$ ($\exists M^{-1}$ ed è ${}^t M$) . (M è ortogonale)

(3) le colonne di M sono una base ortonormale

(attenzione ai termini)

Infatti: $(1) \Longleftrightarrow (2)$ visto

$(2) \Longleftrightarrow (3)$; $M = (u_1, \dots, u_n)$

$$^tM \cdot M = \begin{pmatrix} ^tu_1 \\ \vdots \\ ^tu_n \end{pmatrix} \cdot (u_1, \dots, u_n)$$

dunque $(^tM \cdot M)_{ij} = {}^tu_i \cdot u_j = \langle u_i / u_j \rangle_{\mathbb{R}^n}$

dunque $\quad {}^tM \cdot M = I_n \iff u_1, \dots, u_n$ è base ortonormale.

Esempi: In $\mathbb{R}^2$ le isometrie (matrici ortog)

sono:

rotazioni $\quad \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$

(rotaz. di angolo ϑ)

riflessioni $\quad \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$

(riflessione rispetto alla retta di pendenza $\vartheta/2$)

Verifica: le colonne sono base ortonormale ✓

Esempi: In $\mathbb{R}^3$ ancora rotazioni intorno a rette, riflessioni rispetto a piani e le loro composizioni

$(-id_{\mathbb{R}^n}$ = rotaz. di angolo π intorno asse z

$\circ$ riflessione rispetto piano xy)

Versione complessa:

Oss: $\mathbb{C}^n \longleftrightarrow \mathbb{R}^{2n}$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)$$

Ora $\|z\|$ visto come vett. di $\mathbb{R}^{2n}$ è

$$x_1^2+y_1^2+\dots+x_n^2+y_n^2 = |z_1|^2+\dots+|z_n|^2$$
$$= \overline{z_1}\cdot z_1+\dots+\overline{z_n}\cdot z_n.$$

Idea: per fare il prod. scal. su $\mathbb{C}$
uno dei due vettori va coniugato.

Def: prodotto scalare canonico di $\mathbb{C}^n$

$$\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(z, w) \longmapsto {}^t\overline{w}\cdot z$$

In generale per $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ poniamo

$$A^* = {}^t\overline{A} \in M_{n \times m}(\mathbb{C}) \,.$$

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 2+i & 3-i & 2+7i \\ -4-i & 5+\pi i & \sqrt{3}+e\cdot i \end{pmatrix}$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2-i & -4+i \\ 3+i & 5-\pi i \\ 2-7i & \sqrt{3}-e\cdot i \end{pmatrix}$$

<u>Ora</u>: $\langle z | w \rangle_{\mathbb{C}^n} = w^* \cdot z \,.$

Es:
$$\left\langle \begin{pmatrix} 3-i \\ 2+5i \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 9-2i \\ 7+4i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2}$$
$$= (9+2i)(3-i) + (7-4i)(2+5i) = \ldots$$

Def: se V è uno spazio vett. su $\mathbb{C}$ una applicazione $f: V \times V \to \mathbb{C}$ si dice:

(1) sesquilineare se è lineare a sx e antilineare a destra:

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_3) = \lambda_1 f(v_1, v_3) + \lambda_2 f(v_2, v_3)$$

$\forall v_1\ v_2\ v_3 \in V$

$\forall \lambda_1\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$f(v_3, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \overline{\lambda_1} f(v_3, v_1) + \overline{\lambda_2} f(v_3, v_2)$$

$\forall \dots \ \forall \dots$

(2) hermitiana se $f(w,v) = \overline{f(v,w)}$

(oss: se ciò accade, $f(v,v) = \overline{f(v,v)}$

dunque $f(v,v) \in \mathbb{R}$) _

(3) def. pos. se $f(v,v) > 0 \quad \forall v \neq 0$.

(4) prodotto scalare se è sesquilineare, hermitiano, def. pos.

<u>Oss</u>: $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$ è un prod. scal. su $\mathbb{C}^n$:

(1) $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 | v_3 \rangle_{\mathbb{C}^n} = {}^t\overline{v_3} \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$

$= \lambda_1 \cdot {}^t\overline{v_3} \cdot v_1 + \lambda_2 \, {}^t\overline{v_3} \cdot v_2 = \lambda_1 \langle v_1 | v_3 \rangle_{\mathbb{C}^n} +$
$+ \lambda_2 \langle v_2 | v_3 \rangle_{\mathbb{C}^n}$

$$\langle v_3 \mid \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle_{\mathbb{C}^n} = {}^t\overline{(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)} \cdot v_3$$

$$= \left(\overline{\lambda_1} \cdot {}^t\overline{v_1} + \overline{\lambda_2} \cdot {}^t\overline{v_2}\right) v_3 = \overline{\lambda_1} \cdot {}^t\overline{v_1} \cdot v_3 + \overline{\lambda_2} \cdot {}^t\overline{v_2} \cdot v_3$$

$$= \overline{\lambda_1} \langle v_3 \mid v_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle v_3 \mid v_2 \rangle$$

(2) $\langle w \mid v \rangle_{\mathbb{C}^n} = {}^t\overline{v} \cdot w = {}^t\left({}^t\overline{v} \cdot w\right) = {}^t w \cdot \overline{v}$

$$= \overline{\left({}^t\overline{w} \cdot v\right)} = \overline{\langle v \mid w \rangle_{\mathbb{C}^n}}$$

(3) $\langle v \mid v \rangle_{\mathbb{C}^n} = {}^t\overline{v} \cdot v = |v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2 > 0$ for $v \neq 0$.

Oss: potete trovare lin dx
su altri autori antilin sx

(ad es. $\langle z | w \rangle_{\mathbb{C}^n} = {}^t\bar{z} \cdot w$)

non è la mia convenzione

FONTE #1 DI ERRORE NEGLI SCRITTI D'ESAME DI GEOMETRIA = "dimenticarsi su $\mathbb{C}$ di coniugare uno dei due vettori"

$\underline{\qquad\qquad} \circ \underline{\qquad\qquad}$

Differenze tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$: bisogna badare al fatto che sx e dx non si possono scambiare; ragionare su dove si vuole la linearità.

Prop: se $w_1, \ldots, w_k$ è base ortog. di $W \subset V$

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

non $\langle w_i | v \rangle$
perché voglio P_W lin. in v.

Gram-Schmidt: $v_1, \dots, v_n \rightsquigarrow u_1, \dots, u_n$

base $\qquad$ base ortonormale

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{u}_2 = v_2 - \langle v_2 | u_1 \rangle \cdot u_1 \qquad u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|}$$

non $\langle u_1 | v_2 \rangle$ perché lo voglio lineare in v_2

$$\tilde{u}_3 = v_3 - \langle v_3 | u_1 \rangle u_1 - \langle v_3 | u_2 \rangle \cdot u_2 \quad \dots$$

Visto su $\mathbb{R}$: •) le $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilineari sono tutte e sole le $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ con $A \in M_{n\times n}$, dove $\langle x | y \rangle_A = {}^t y \cdot A \cdot x$.

•) $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è simmetrica $\Leftrightarrow$ A simmetrica

•) def pos?

Su $\mathbb{C}$: Fatto 1: posto $\langle z | w \rangle_A = {}^t\bar{w} \cdot A \cdot z$ si ha che le $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ sesquilineari sono esattamente le $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$.

(Dimo come su $\mathbb{R}$: data f sesquilin. si ha
$f = \langle \cdot | \cdot \rangle_A$ con $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.)

Fatto 2: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è hermitiana

$$\iff A^* = A \quad (\text{diremo } A \text{ hermitiana})$$

Infatti: $\langle w | v \rangle_A = \overline{\langle v | w \rangle_A} \quad \forall v, w$

$$\iff {}^t\bar{v} \cdot A \cdot w = \overline{{}^t\bar{w} \cdot A \cdot v} \quad \forall v, w$$

$$\iff \quad {}^t\bar{v} \cdot A \cdot w = {}^t w \cdot \overline{A} \cdot \bar{v} \quad \ldots$$

$$\iff \quad {}^t\bar{v} \cdot A \cdot w = {}^t\left({}^t w \cdot \overline{A} \cdot \bar{v}\right) \quad \ldots$$

$$\iff \quad {}^t\bar{v} \cdot A \cdot w = {}^t\bar{v} \cdot {}^t\overline{A} \cdot w \quad \ldots$$

$$\iff \quad {}^t\bar{v} \cdot A \cdot w = {}^t\bar{v} \cdot A^* \cdot w \quad \forall v, w$$

$$\iff \quad A^* = A.$$

•) $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ def. pos ? (risponderemo).

Visto: $\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : {}^tA = A\}$ è un sottospazio di $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ di dimensione $n(n+1)/2$.

Su $\mathbb{C}$: $A \in M_{n\times n}$ è hermitiana (cioè ${}^t\bar{A} = A$) se

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}+iy_{12} & x_{13}+iy_{13} & \cdots \\ x_{12}-iy_{12} & x_{22} & \cdots & \\ x_{13}-iy_{13} & \cdots & x_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : A^* = A\}$

non è un sottospazio complesso di $M_{n\times n}(\mathbb{C})$; tuttavia è un sottospazio reale, e ha $\dim_{\mathbb{R}}$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n^2.$$

Def: V sp. vett. su $\mathbb{C}$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ prod. scal. dico che $f: V \to V$ lineare è isometria se $\langle f(v) | f(w) \rangle = \langle v | w \rangle \quad \forall v, w$.

<u>Fatto</u>: per $\mathbb{C}^n$ con $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{C}^n}$
dato $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ sono fatti equiv:

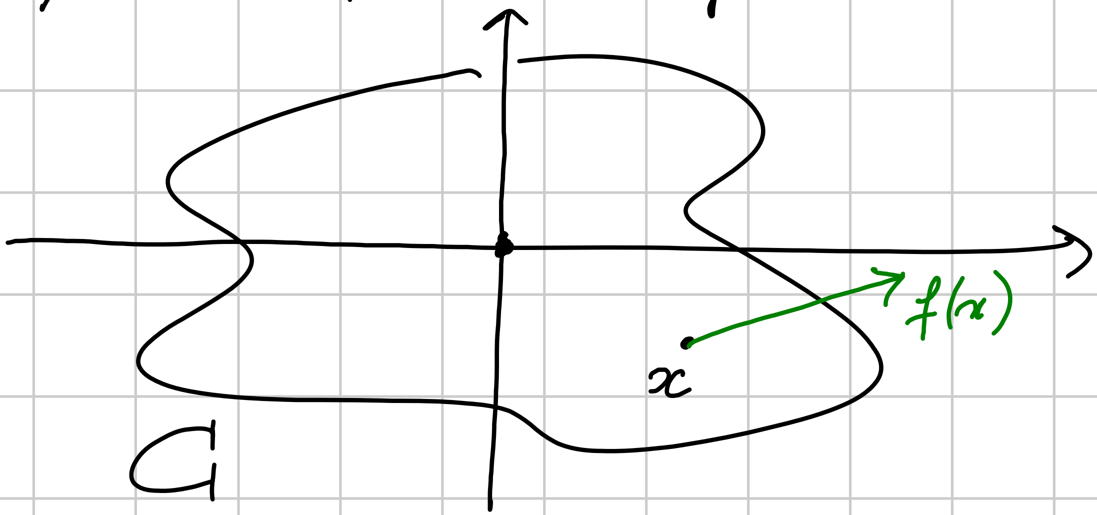
1) M è isometria

2) $M^* \cdot M = I_n$ (diremo M unitaria)

3) le colonne di M sono base ortonormale

DIAGONALIZZAZIONE

Sia G un corpo rigido in $\mathbb{R}^3$ sottoposto a forze, con centro di gravità nell'origine e in equilibrio (centro di gravità immobile).



$f(x)$ = risultante di tutte le forze applicate a x

$f : C_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Equilibrio: $f(0) = 0$.

Approssimiamo f al primo ordine vicino a 0 usando il gradiente di ciascuna delle componenti:

$$F = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1(0) & \partial f_1/\partial x_2(0) & \partial f_1/\partial x_3(0) \\ \partial f_2/\partial x_1(0) & \dots & \dots \\ \partial f_3/\partial x_1(0) & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

cioè $f(x) \cong F \cdot x$ (approx. al I ordine).

(linearizzazione).

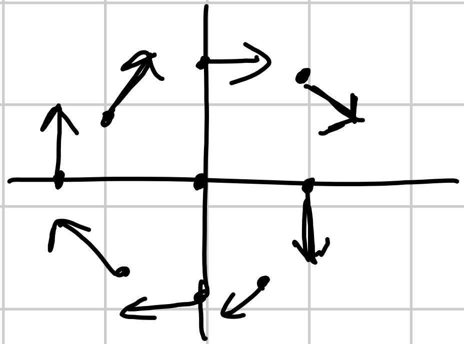
So che:

$$F = \underbrace{\frac{1}{2}\left(F + {}^tF\right)}_{\substack{\parallel \\ M \\ \text{simmetrica}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(F - {}^tF\right)}_{\substack{\parallel \\ A \\ \text{antisimmetrica}}}$$

(ecco $M_{n\times n} = (\text{simm}) \oplus \begin{pmatrix}\text{anti}\\\text{simm}\end{pmatrix}$)

responsabile di movimento rigido del corpo responsabile di deformazione –

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$



$\rightsquigarrow$ rotaz

Es:

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} & 1 \\ 2\sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$$

effetto?

Invece:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \qquad M \cdot v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} & 1 \\ 2\sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot v_1$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad M \cdot v_2 = \dots = -2 \cdot v_2$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} \qquad M \cdot v_3 = \dots = v_3$$

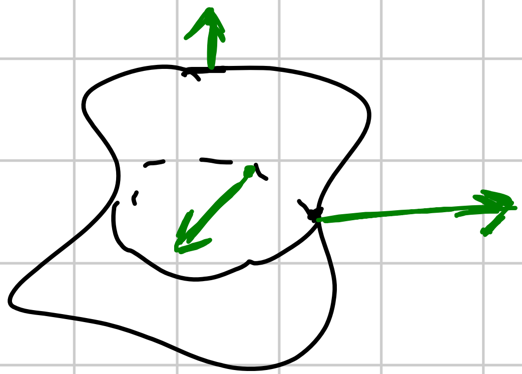
Inoltre: v_1, v_2, v_3 sono ortogonali fra loro

$\Rightarrow u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$, $u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$ ho:

1) u_1, u_2, u_3 è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$
cioè usando invece x le coordinate $y \mapsto y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$
ho un nuovo sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico

2) $M \cdot u_1 = 3u_1 \qquad M \cdot u_2 = -2u_2 \qquad M \cdot u_3 = u_3$
cioè nel nuovo sistema di riferimento la M diventa

$$M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Effetto:

- "forte" dilatazione nella direz u_1
- "media" compressione nella direz u_2
- "debole" dilatazione nella direz u_3

——— o ———

Def: dato V sp. vett. su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) e $f: V \to V$ lineare, diciamo che f è diagonalizzabile se esiste una base $\mathcal{B}$ di V t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è diagonale, cioè se esistono una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.c. $f(v_j) = \lambda_j v_j$ per $j = 1, \dots, n$.

Q: quali f sono diagonalizzabili?

Def: Data $f: V \to V$ lineare diciamo che $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di f se esiste $v \in V$, $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$.

Ogni tale v si dice autovettore di f rispetto a λ.