Geometria 26/4/14

$f : V \to V$ lin. $(\dim_{\mathbb{K}}(V) = n)$

f diagonalizzabile se esiste $\mathcal{B}$ base di V t.c. $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ cioè

$f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ se $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$.

$\lambda \in \mathbb{K}$ è autoval. di f se $\exists v \neq 0$ (autovettore) t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$.

Pol. caratteristico $p_f(t) = \det(t \cdot I_n - [f]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0})$.

Visto: (1) λ autoval. $\Leftrightarrow$ $p_f(\lambda) = 0$

(2) Se $p_f(t)$ ha radici $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ distinte in $\mathbb{K}$ allora f è diagonalizzabile
(idea: gli autovett. rel. a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sono base).

Oss: (1) Se f è diago allora $p_f(t)$ ha n radici in $\mathbb{K}$ contate con molteplicità:

$\exists \mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_f(t) = \det \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t-\lambda_n \end{pmatrix} = (t-\lambda_1) \dots (t-\lambda_n)$

(2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora $p_f(t)$ ha sempre n

radici in $\mathbb{K}$ contate con molteplicità _____ o _____

f diago?

$\downarrow$

calcolo $p_f(t)$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

vedo se $p_f(t)$ ha n radici in $\mathbb{R}$ con molt.

$\downarrow$ no

f non diago

sì

distinte?

sì $\swarrow$ $\searrow$ no

f diago   prox teorema.

<u>Def</u>: se λ è autoval. di f, chiamo

molteplicità algebrica di λ la sua molt. come radice di $p_f(t)$

m.a.

molteplicità geometrica la $\dim_{\mathbb{K}}(\ker(\lambda \cdot id_V - f))$

m.g.

Oss: $1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$. Infatti:

$m.g.(\lambda) \geq 1$ poiché $\mathrm{Ker}(\lambda \cdot id_V - f) \neq \{0\}$ (per def. di autovalore).

Inoltre se $m.g.(\lambda) = k$ prendo una base $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ di V i cui primi k vettori generano $\mathrm{Ker}(\lambda \cdot id_V - f)$; allora:

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & M \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & N \end{array} \right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} \lambda \\ \ddots \\ \lambda \end{array}}\right\} k \\ \vphantom{0} \end{array} \\ \begin{array}{l} \underbrace{\hphantom{\lambda \quad \ddots \quad 0}}_{k} \hphantom{\quad M \quad} \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow p_f(t) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} t-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & -M \\ 0 & & t-\lambda & \\ \hline & 0 & & t \cdot I_{n-k} - N \end{array} \right)$$

$$= (t-\lambda)^k \cdot p_N(t)$$

$\Rightarrow$ m.a.$(\lambda) \geq k \Rightarrow$ OK.

Teo: f è diagonalizzabile se e solo se $p_f(t)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ e per ciascuna si ha che m.a. = m.g.

<u>Oss</u>: il caso autoval. distinti è un caso particolare (infatti: "distinti" significa "tutti con m.a. = 1" ma $1 \le$ m.g. $\le$ m.a.).

<u>Idea dimo</u>: prendere basi dei vari autospazi e provare che insieme danno una base di V.

Esempi: (1) $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$p_A(t) = t^2 - \mathrm{tr}(A)\cdot t + \det(A)$$

$$\Delta \begin{cases} < 0 & \text{radici non in } \mathbb{R} \text{ ma distinte in } \mathbb{C} \Longrightarrow \text{non diago su } \mathbb{R} \text{ ma diago su } \mathbb{C} \\ > 0 & \text{due radici distinte} \Longrightarrow \text{diago su } \mathbb{R} \\ = 0 & \text{una sola radice } \lambda \end{cases}$$

m.g$(\lambda)=1$ m.g.$(\lambda)=2$

non diagonalizzabile

diagonalizzabile

$\Longrightarrow \exists M$ t.c.

$$M^{-1} A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A = M \cdot \lambda \cdot I_2 \cdot M^{-1}$$

$$= \lambda \cdot \underbrace{M \cdot I_2 \cdot M^{-1}}_{\substack{M \cdot M^{-1} \\ \shortparallel \\ I_2}}$$

$\Longrightarrow$ A è già diagonale

Caso numerico:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 25 \\ -9 & -19 \end{pmatrix}$$

$tr = -8$

$det = -209 + 225 = 16$

$$p_A(t) = t^2 + 8t + 16 = (t+4)^2$$

$\Longrightarrow$ unico autovalore $\lambda = -4$ con m.a. $= 2$.

Siccome A non è diagonale allora non è diagonalizzabile (NOTA: vale poiché A è 2×2).

(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -12 \\ 1 & 14 & -25 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$

$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+1 & -5 & 12 \\ -1 & t-14 & 25 \\ -1 & -4 & t+6 \end{pmatrix} =$ conti $=$

$= t^3 - 7t^2 + 15t - 9$

$= (t-1)(t^2 - 6t + 9)$

$= (t-1)(t-3)^2$

Autovalori : $1 \, , \, 3$

$m.a.(1) = 1 \implies m.g.(1) = 1$ ok

$m.a.(3) = 2 \implies m.g.(3) <$ 1 non diago / ? / 2 diago

$m.g.(3) = \dim \operatorname{Ker}(3 \cdot I_3 - A)$

$$= 3 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 4 & -5 & 12 \\ -1 & -11 & 25 \\ -1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - 2 = 1 \implies A \text{ non diago}$$

(3) $$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 6 & -6 & 16 \\ 3 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} t+1 & -4 & 8 \\ -6 & t+6 & -16 \\ -3 & 4 & t-10 \end{pmatrix} = \ldots = t^3 - 3t^2 + 4$$

$$= (t+1)(t^2 - 4t + 4) = (t+1)(t-2)^2$$

autoval $-1, 2$ $\quad m.a.(-1) = 1 \Rightarrow m.g.(-1)=1$

$m.a.(2) = 2$

$$m.g.(2) = \dim \operatorname{Ker}(2I_3 - A) = 3 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ -6 & 8 & -16 \\ -3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= 3-1 = 2$$

$\Rightarrow A$ diago, cioè $\exists M$ t.c. $M^{-1}\cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

Teorema spettrale (reale): $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$;

A simmetrica $\iff$ si diagonalizza tramite una matrice ortogonale. $(*)$

<u>Oss</u>: M ortogonale $\iff$ ${}^tM = M^{-1}$

$\iff$ le colonne di M sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Quindi la condizione $(*)$ si può esprimere anche in questi modi equivalenti:

•) $\exists M$ t.c. ${}^tM = M^{-1}$ e ${}^tM \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

•) $\exists u_1, \dots, u_n$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ t.c.

$$A \cdot u_j = \lambda_j \cdot u_j \qquad j = 1, \dots, n.$$

<u>Dimo</u>: $\underline{\Leftarrow}$ (poco interessante)

$\exists M$ t.c. ${}^tM = M^{-1}$ e ${}^tM \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow A = M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot {}^tM \\ \Rightarrow {}^tA = M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot {}^tM \end{array}\right\} \Rightarrow {}^tA = A.$$

✓

$\underline{\Rightarrow}$ Passo 1: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di A.

Infatti prendo $\lambda \in \mathbb{C}$ radice di $p_A(t)$

$\rightarrow \exists z \in \mathbb{C}^n$ t.c. $z \neq 0$, $A \cdot z = \lambda \cdot z$.

Ora:

$$\langle A \cdot z \mid z \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \lambda \cdot z \mid z \rangle_{\mathbb{C}^n} = \lambda \cdot \|z\|^2$$

$$\|$$

$$\langle z \mid A^* \cdot z \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle z \mid \underbrace{\overline{{}^t A}}_{A} \cdot z \rangle = \langle z \mid A \cdot z \rangle$$

$$= \langle z \mid \lambda \cdot z \rangle$$

$$= \overline{\lambda} \cdot \|z\|^2$$

ma $\|z\|^2 \neq 0 \Longrightarrow \bar{\lambda} = \lambda \Longrightarrow \lambda$ reale.

(Ho anzi visto che ogni autoval. di A è reale.)

<u>Passo 2</u>: Conclusione. Scelgo λ autoval e w autovett. relativo con $\|w\| = 1$;

completo w a una base ortonormale $(w, w_2, \dots, w_n) = N$ di $\mathbb{R}^n$, cioè N è matrice ortogonale. Ho: $\quad ({}^tN = N^{-1})$

$$ {}^tN \cdot A \cdot N = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & b_2 \dots b_n \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right). $$

Ora ${}^t({}^tN \cdot A \cdot N) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \cdots 0 \\ \hline b_2 & \\ \vdots & {}^tA_1 \\ b_n & \end{array}\right)$

$$\begin{gathered} \| \\ {}^tN \cdot {}^tA \cdot N \\ \| \\ {}^tN \cdot A \cdot N = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & b_2 \cdots b_n \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right) \end{gathered}$$

$\Longrightarrow b_2 = \ldots = b_n = 0$ e ${}^tA_1 = A_1$

dunque ho trovato N ortog. t.c.

$${}^tN \cdot A \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \quad \text{con } {}^tA_1 = A_1;$$

procedendo induttivamente ho N_1 $(n-1)\times(n-1)$

ortog con $\;{}^tN_1 \cdot A_1 \cdot N_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \; {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix} \cdot {}^tN \cdot A \cdot \underbrace{N \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}}_{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

${}^tM = M^{-1}$ e ${}^tM \cdot A \cdot M$ diago

$\Longrightarrow$ OK. $\boxtimes$

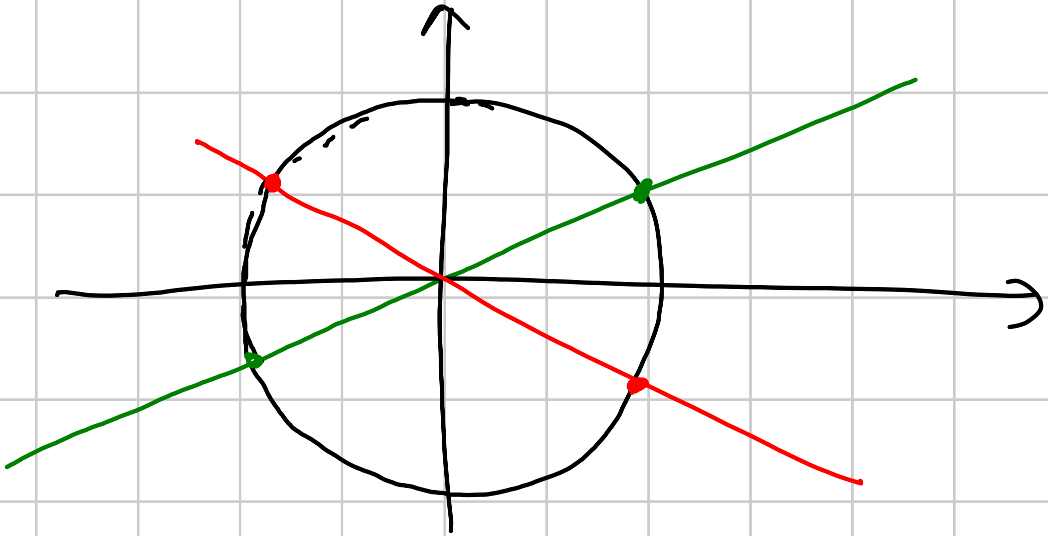
Seconda dimostrazione del passo I
"A simm $\Rightarrow$ A ha un autoval. reale".

Pongo $a : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$a(x) = \frac{\langle x|x\rangle_A}{\langle x|x\rangle_{\mathbb{R}^n}} = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j}{\sum_{l=1}^{n} x_l^2}$$

Osservo: a è quoziente di polinomi $\Rightarrow$ derivabile
Inoltre $a(\lambda \cdot x) =$

$$= \frac{\langle \lambda x | \lambda x \rangle_A}{\langle \lambda x | \lambda x \rangle_{\mathbb{R}^n}} = \frac{\lambda^2 \langle x | x \rangle_A}{\lambda^2 \cdot \langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n}} = a(x)$$



$\Rightarrow$ i valori assunti da a sono quelli assunti su

$$S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1 \}$$

(sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$)

ma S^{n-1} è chiuso e limitato

$\Longrightarrow$ (analogo di Bolzano-Weierstrass) ammette max assoluto λ

$\Longrightarrow$ in un punto $y \neq 0$ in cui è assunto il max assoluto λ tutte le derivate parziali sono nulle.

$$a(x) = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j}{\sum_{l=1}^{n} x_l^2}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x_k}(y) = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} y_i\right) \cdot \|y\|^2 - 2y_k \cdot \langle y|y\rangle_A}{\|y\|^4}$$

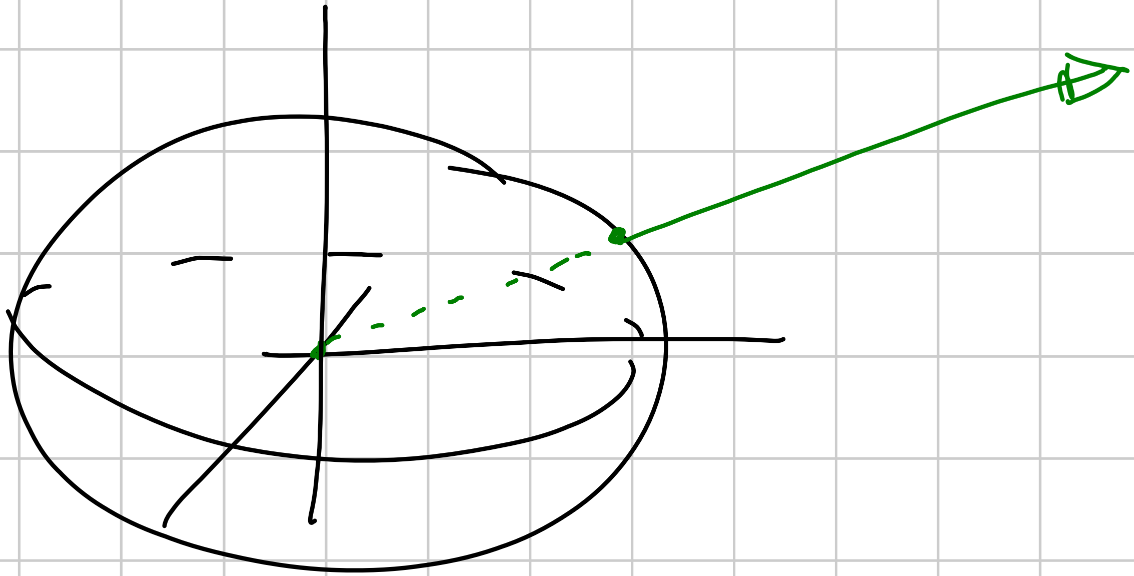
uguali fra loro
perché A è simmetrica

è nullo: ora

$$\Rightarrow \cancel{2} \underbrace{\sum a_{kj} \cdot y_j}_{(A \cdot y)_k} = \cancel{2} y_k \cdot \underbrace{\frac{\langle y|y\rangle_A}{\|y\|^2}}_{\lambda}$$

$$\Rightarrow A \cdot y = \lambda \cdot y$$

cioè l'autoval con autovettore y -



Il massimo sforzo si ha in un punto che è nella stessa direzione rispetto al baricentro dello sforzo - ▨

Q: Data A simmetrica quando si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è un prod. scal?

Prop: se e solo se A ha autoval. positivi.

Dim: Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori. So che esiste M t.c. ${}^tM = M^{-1}$ e ${}^tM \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Ora:

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ def. pos.

$\iff \langle x | x \rangle_A > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\iff \langle M \cdot x | M \cdot x \rangle_A > 0 \quad \forall x \neq 0$ (poiché M è invertibile)

$\iff {}^t x \cdot {}^t M \cdot A \cdot M \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$

$$\underset{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}{\overset{}{{}^t M \cdot A \cdot M}}$$

$\iff \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tutti > 0. $\blacksquare$

Prop: Data A simmetrica poniamo
$d_k = \det$ (sottomatrice $k \times k$ in alto a sx).
Allora:

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_A \text{ è def. pos.} \iff d_1, \dots, d_n > 0.$$

Es: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad d_1 = a_{11}$, $\quad d_2 = \det(A)$

già visto che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ def. pos. $\iff d_1, d_2 > 0$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 10 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$d_1 = 1 > 0$

$d_2 = 10 - 9 = 1 > 0$

$d_3 = 10 - 15 - 15 - 40 - 9 - 25 < 0$

$\Rightarrow \langle \cdot | \cdot \rangle_A$ non def pos.

Dimo: Lo provo per induzione su n.

$n = 1$: $A = (a)$ $\quad d_1 = a$ ✓

$n \geq 2$: Per induzione:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \vdots \\ \hline \cdots & \end{array}\right)$$

A_1 è def. pos. dato che i suoi determinanti $d_1, \dots, d_{n-1}$ sono positivi

$$\Rightarrow \langle y | y \rangle_A > 0 \quad \forall y \neq 0,\ y \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}.$$

Ora $d_n = \det(A)$ è positivo

$\Longrightarrow$ poiché il determinante è il prodotto degli autovalori o sono tutti positivi o ce ne sono almeno due negativi;

in tal caso se w_1, w_2 sono autovalori relativi e $W = \mathrm{Span}(w_1, w_2)$ ho che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ ristretto a W è data da

$$\begin{pmatrix} \text{neg.} & 0 \\ 0 & \text{neg.} \end{pmatrix} \Longrightarrow \langle w | w \rangle_A < 0 \quad \forall w \in W$$

$\dim W = 2$

Ora $\dim(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}) = n-1$

$\dim(W) = 2$

per Grassmann esiste $x \neq 0$, $x \in (\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}) \cap W$

Ciò è assurdo $\langle x|x\rangle_A$ >0 <0

impossibile.

$\blacksquare$

Estensione: data A simm.

$$d_k = \det \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\;*\;}_{k} & \\ \hline & \end{array} \right) \Big\} k$$

<u>Teo</u>: se $d_1, \dots, d_{n-1}$ sono $\neq 0$ allora i segni degli autovalori di A sono uguali ai segni di:

$$d_1, \quad d_2/d_1, \quad d_3/d_2, \quad \dots, \quad d_n/d_{n-1}. \quad \square$$