ETA 9/10/14

<u>Visto</u>: $H_n(K) = H_n(|K|)$ K compl. simpliciale

passando a $H_n(K)$ K compl. politopale.

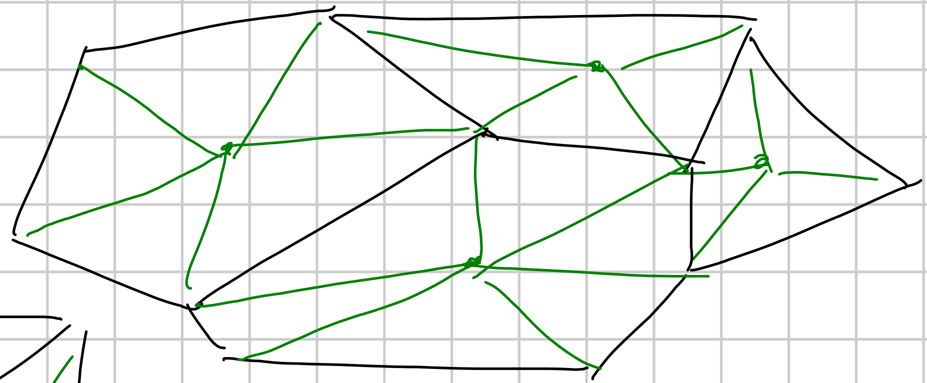
Provo comunque che $|K_1| = |K_2|$ c.s.
$\Rightarrow \exists$ suddivisione simpliciale comune. Basta:

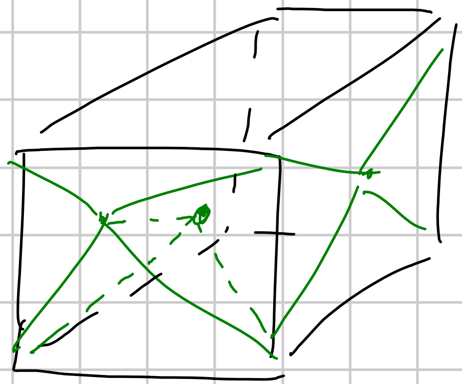
<u>Prop</u>: ogni complesso politopale ha una suddivisione simpliciale.

<u>Dim</u>: Ricorsivamente su $K^{(p)}$ $p = 0, 1, \ldots$

$p=0,1$ ok

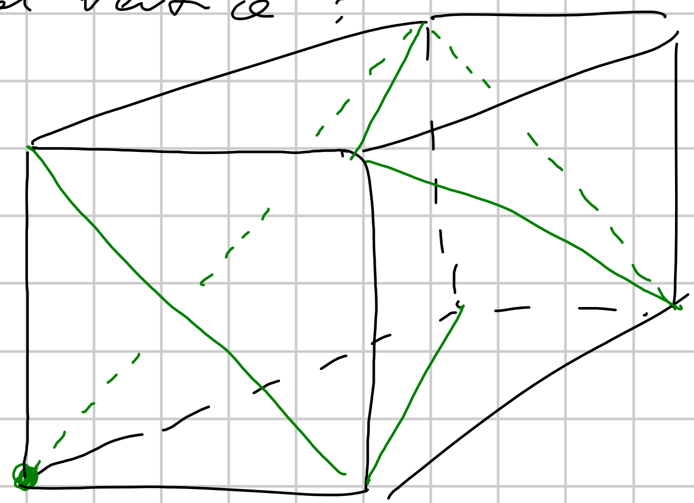
Per $K^{(p)}$: prendo $\forall \sigma \in K^{[p]}$ $x_\sigma \in int(\sigma)$ e il cono sulla triangolazione già costruita di $K^{(p-1)}$:



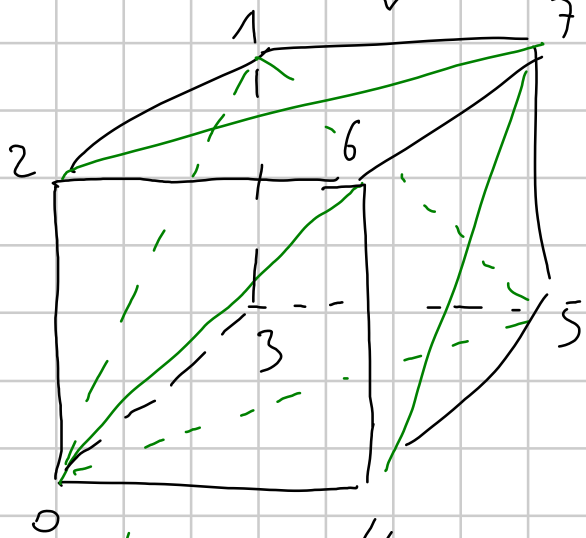


$\boxtimes$

Oss: in realtà si può triangolare senza aggiungere vertici: si sceglie un ordinamento totale per $K^{[0]}$ e per ogni simplesso si prende il cono dal vertice più piccolo sulle facce più suddivise che non contengono quel vertice:



a caso: non torna

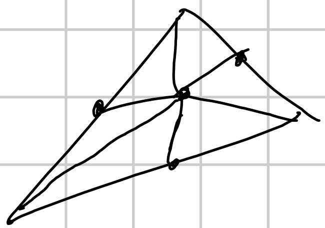


Tetraedri 0647, 0457, 0672, ...

Cor: Dato K compl. simpl. e $\varepsilon > 0$ esiste L suddivisione di K t.c. $\max\{\mathrm{diam}(\sigma) : \sigma \in L\} < \varepsilon$

(Un modo: definire suddivisione baricentrica

$$\text{baricentro}(v_0, \dots, v_n) = \frac{v_0 + \dots + v_n}{n}$$



induttivamente su p per $K^{(p)}$: aggiungere baricentri e fare cono sulle suddivisione di $K^{(p-1)}$.

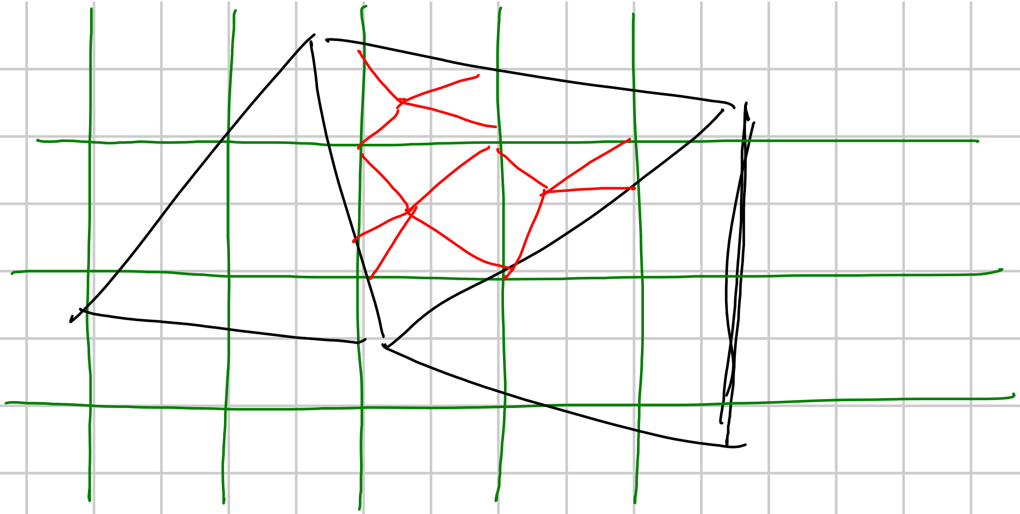
Iterando la suddivisione baricentrica i diametri tendono a 0.)

Altro modo: prendo il complesso politopale C_δ infinito ma localmente finito le cui N-celle sono

$$[0,\delta]^N + \delta\cdot\mathbb{Z}^N \quad \text{con } \delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}$$

Prendo $\{\tau\cap\sigma : \tau\in K,\ \sigma\in C_\delta\}$ è

un complesso politopale che suddivide K con $\max(\mathrm{diam}) < \varepsilon \Rightarrow$ basta suddividerli:



<u>Oss</u>: Se $|K| \cap |\mathcal{L}| = \emptyset$ allora

$$H_n(K \cup \mathcal{L}) \cong H_n(K) \oplus H_n(\mathcal{L})$$

Perché $(C_n(K \cup \mathcal{L}), \partial^{K \cup \mathcal{L}}) = (C_n(K) \oplus C_n(\mathcal{L}),$

$\partial_n^{\mathcal{X}} \oplus \partial_n^{\mathcal{Z}}$) .

Studiamo ora $H_p(K)$ con $|K|$ connesso per $p = 0, 1$.

Esercizio: vedere che $|K|$ connesso $\Rightarrow$ $|K|$ connesso per archi.

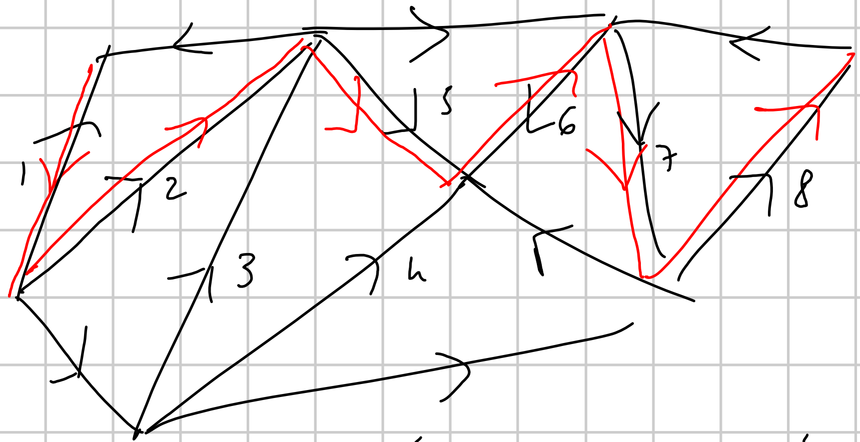
Def: se K è orientato (ogni $\sigma \in K$ orientato) chiamo cammino simpliciale una sequenza

$$e_0^{\varepsilon_0} \cdot e_2^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \cdot e_n^{\varepsilon_n} \quad \text{con} \quad e_j \in K^{[1]}, \ \varepsilon_j \in \{\pm 1\}$$

secondo estremo di $e_{j-1}^{\varepsilon_{j-1}}$ = primo estremo di $e_j^{\varepsilon_j}$

dove e^{+1} = e con la sua orientaz

e^{-1} = e con orientaz. opposta



$$e_1^{-1} \cdot e_2 \cdot e_5 \cdot e_6^{-1} \cdot e_7 \cdot e_8$$

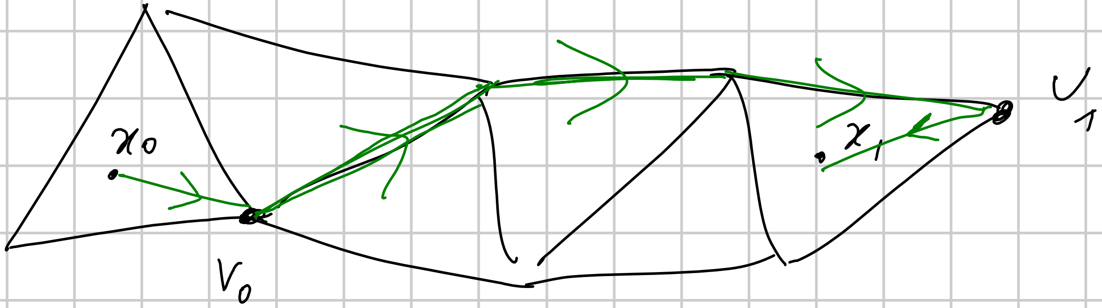
Chiaro: definisce un cammino $[0,1] \longrightarrow |K|$:

su $\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$ percorro $e_j^{\varepsilon_j}$

Prop: $|K|$ connesso per archi $\Longleftrightarrow$ ogni $v_0, v_1 \in K^{[0]}$ sono uniti da un cammino simpliciale

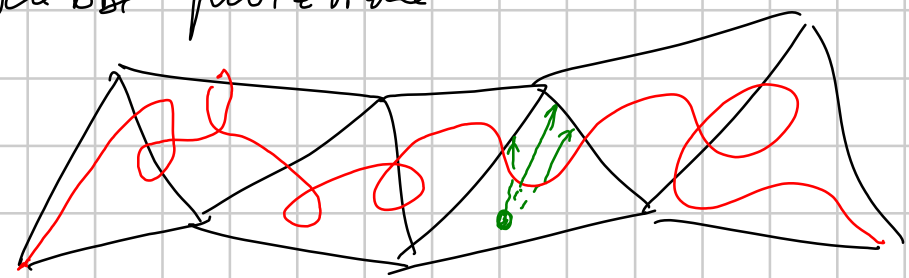
Cor: $|K|$ connesso (p.a.) $\Longleftrightarrow$ lo è $|K^{[1]}|$.

Dim: $\boxed{\Leftarrow}$: presi $x_0, x_1 \in |K|$ scelgo $\sigma_0, \sigma_1 \in K$ t.c. $x_j \in \sigma_j$; scelgo $v_j \in \sigma_j^{[0]}$ e unisco x_j a v_j in σ_j con segmento e v_0 a v_1 con cammino simpliciale:



$\Longrightarrow$ Dati $v_0, v_1 \in K^{[0]}$ esiste cammino α continuo che unisca v_0 a v_1.

Se α evitasse i centri dei simplessi di dim ≥ 2 basterebbe proiettare



... <u>no</u>.

Prendo $\delta = \min\{ dist(\sigma,\tau) : \sigma,\tau \in \mathcal{K},\ \sigma \cap \tau = \emptyset \}$

$dist(X,Y) = \min\{ d(x,y) \ldots \} > 0$ per X, Y compatti disgiunti

$\delta > 0$.

Per $\sigma \in K$ prendo $U_\sigma = \{ x \in |\mathcal{K}| : d(x,\sigma) < \delta/2 \}$

aperto $\Longrightarrow \{ \alpha^{-1}(U_\sigma) : \sigma \in K \}$ ricoprimento aperto di $[0,1] \Longrightarrow$

$\exists\ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = 1$ t.c.

$\alpha([t_{j-1}, t_j]) \subset U_{\sigma_j}$.

Affermo che

- $v_0 \in \sigma_0^{[n]}$ infatti

$$v_0 = \alpha(t_0) \in U_{\sigma_0} \Rightarrow d(v_0, \sigma_0) < \delta/2 < \delta$$

$$v_0, \sigma_0 \in K$$

$$\Rightarrow v_0 \cap \sigma_0 \neq \emptyset \Rightarrow v_0 \in \sigma_0$$

$$\Rightarrow v_0 \in \sigma_0^{[n]}$$

- analogamente $v_1 \in \sigma_p^{[n]}$

- $\sigma_j \cap \sigma_{j+1} \neq \emptyset$ infatti

$$t_j \in [t_{j-1}, t_j] \cap [t_j, t_{j+1}]$$

$$\Rightarrow \alpha(t_j) \in \bar{U}_{\sigma_j} \cap U_{\sigma_{j+1}}$$

$$\Rightarrow d(\alpha(t_j), \sigma_j) < \delta/2$$
$$d(\alpha(t_j), \sigma_{j+1}) < \delta/2$$

$$\Rightarrow d(\sigma_j, \sigma_{j+1}) < \delta \Rightarrow \sigma_j \cap \sigma_{j+1} \neq \emptyset.$$

Conclusione: prendo $w_j \in (\sigma_j \cap \sigma_{j+1})^{[0]}$ ed
pongo $w_0 = v_0$, , $w_{p+1} = v_1$
$e_j^{\pm 1}$ un lato di σ_j che unisce w_{j-1} a w_j. ▨

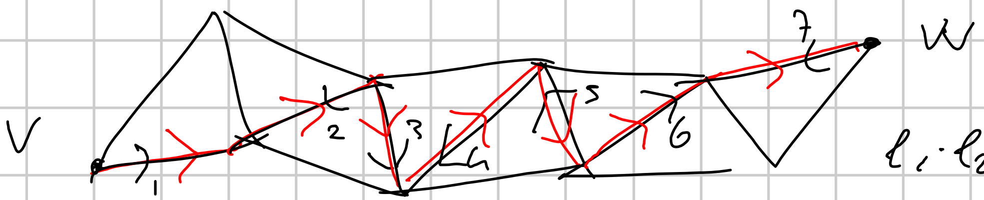
Prop: se $|K|$ è connesso ho che $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$

Cor: $H_0(K) = \mathbb{Z}^{\#(\text{c.c. di } |K|)}$

Dim: $Z_0(K) = \mathbb{Z}\cdot K^{[0]}$

Basta provare che $B_0(K)$ è generato da tutti i $v-w$ con $v,w \in K^{[0]}$.

Segue dal fatto che ogni $v,w \in K^{[0]}$ sono uniti da un cammino simpliciale che definisca una catena il cui bordo è $v-w$



$e_1 \cdot e_2^{-1} \cdot e_3 \cdot e_4^{-1} \cdot e_5^{-1} \cdot e_6 \cdot e_7^{-1}$

$e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 \in C_1(K)$

$\partial($ " $) = w - v$

$\Rightarrow H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ generato $[v]$ con $v \in K^{(0)}$ qualsiasi

———— o ————

G gruppo: abelianizzato di G

$$Ab(G) = G/_{[G,G]}$$

$[G,G]$ = sottogruppo generato dai commutatori $[g,h] = g h g^{-1} h^{-1}$

(normale: $a \cdot [g_1,h_1] \cdots [g_n,h_n] a^{-1}$
$= [a g_1 a^{-1}, a h_1 a^{-1}] \cdots\cdots$)

<u>Teo</u>: $|K|$ connesso $\Rightarrow H_1(K) = Ab(\pi_1(|K|))$.

Diamo dimostrazione indiretta dando regole di calcolo di π_1 e H_1 da cui esso segue.

<u>Def</u>: presentazione di un gruppo

$$G = \langle \underbrace{a_1, \dots, a_k}_{\text{lettere}} \mid \underbrace{r_1, \dots, r_h}_{\text{parole nelle lettere } a_i^{\pm 1}} \rangle$$

è il gruppo

$$\mathbb{Z}_{a_1} * \cdots * \mathbb{Z}_{a_k} \big/ N$$

N = minimo sottogruppo normale che contiene le parole $r_1, \ldots, r_h$.

<u>Lem</u>: Se $G = \langle a_1, \ldots, a_k \mid r_1, \ldots, r_h \rangle$ allora

$$Ab(G) \underset{(1)}{=} \langle a_1, \ldots, a_k \mid r_1, \ldots, r_h, [a_i, a_j] \text{ per } i \neq j \rangle$$

$$\underset{(2)}{=} \langle a_1, \ldots, a_k \mid \tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_h, (a_i, a_j) \text{ per } i \neq j \rangle$$

dove se $r_t = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{i_t}^{\varepsilon_t}$ si ha

$$\tilde{r}_t = \prod_{i=1}^{k} a_i^{\left(\sum_{i_s = i} \varepsilon_s\right)} .$$

<u>Dim</u>: (1) I commutatori in G sono immagine in G dei commutatori in $\mathbb{Z}_{a_1} * \cdots * \mathbb{Z}_{a_k} =: F$ quindi basta vedere che il più piccolo sottogruppo normale N di F che contiene ogni $[a_i, a_j]$ con $i \neq j$ contiene tutti i commutatori:

<u>Osservo</u>: $[a^{-1}, b] = a^{-1} \cdot [b, a] \cdot a$

$\Longrightarrow$ stanno in N anche $[a_i^{\pm 1}, a_j^{\pm 1}]$.

Esempio: $[a \cdot b, c] \in N$ per $a, b, c \in \{a_1, \ldots, a_k\}$

$$[(a\cdot b), c] = a\cdot b\cdot c\cdot (a\cdot b)^{-1} c^{-1} = a\cdot b\cdot \underbrace{c\cdot b^{-1}}\cdot \underbrace{a^{-1}\cdot c^{-1}}$$

$$= a\cdot \underbrace{b\cdot b^{-1}\cdot c\cdot [c^{-1}, b]}\cdot \underbrace{[a^{-1}, c^{-1}]\cdot c^{-1}\cdot a^{-1}}$$

$$= (a\cdot c)\cdot [c^{-1}, b]\cdot [a^{-1}, c^{-1}]\cdot (a\cdot c)^{-1} \in N\,.$$

(2) $\tilde{\pi}_t$ è la parola ottenuta da π_t tenendo conto del fatto che i generatori commutano. $\blacksquare$

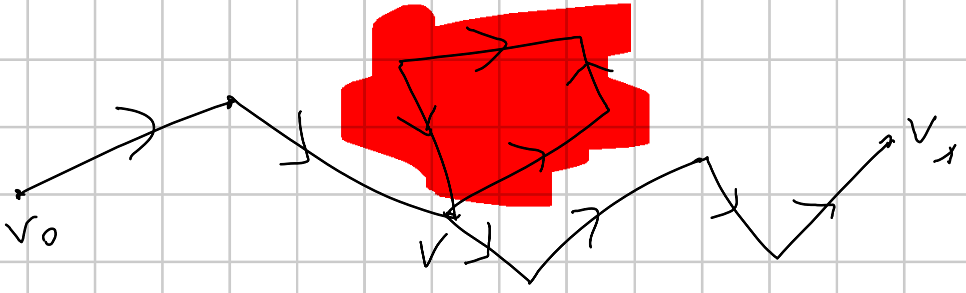
<u>Def</u>: Se $K = K^{(1)}$ chiamo $|K|$ un grafo.

Dico che K è un albero se non contiene cammini simpliciali semplici e chiusi non costanti.

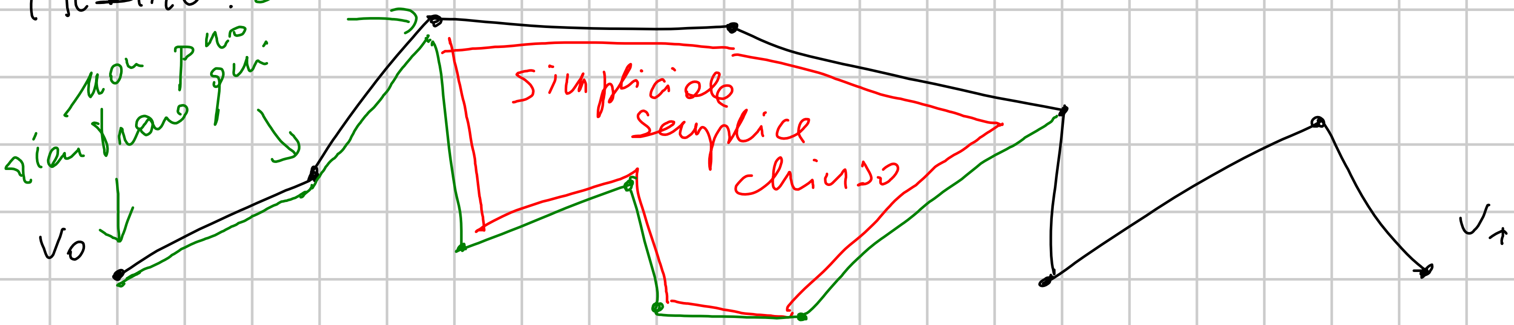
<u>Oss</u>: un cammino simpliciale chiuso è semplice se e solo se ha tutti i vertici distinti tranne primo = ultimo.

<u>Lem</u>: K grafo connesso $\Rightarrow$ $v_0, v_1 \in K^{[0]}$ sono uniti da un cammino simpliciale semplice. Se K è un albero tale cammino è unico.

<u>Dim</u>: Se ho un cammino simpliciale che unisce v_0 a v_1 e passa due volte da $v \in K^{[0]}$ cancello il tratto di α che parte da v e ci ritorna.



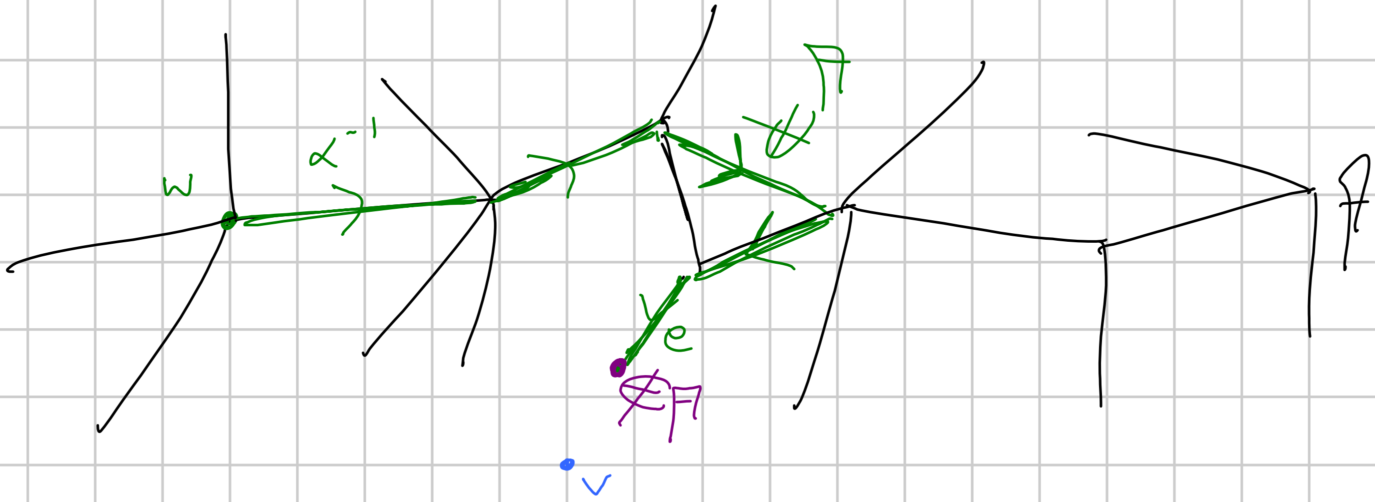
Albero:



$\blacksquare$

Lem: K connesso (prot/s) ; $A \subset K$ albero massimale $\Rightarrow$ A contiene $K^{[0]}$

Dim: sia $v \in K^{[0]} \setminus A$. Unisco v a $w \in A$ con un cammino simpliciale semplice α. Chiamo e il primo lato di α^{-1} che ha un estremo non contenuto in A:

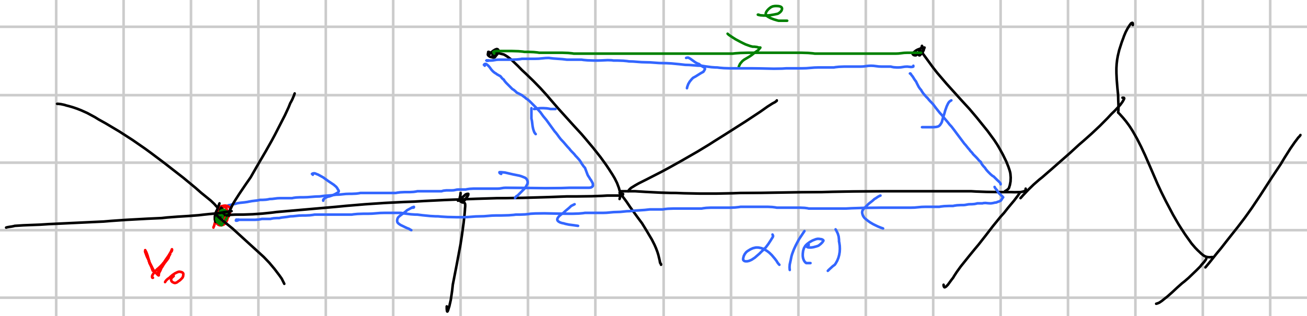


Facile: $A \cup e$ è un albero: contro la massimalità. $\boxtimes$

Fisso K (con orientazioni fissate su ogni $\sigma \in K$) compl. simpl. connesso, $A \subset K$ albero massimale, $v_0 \in A^{[0]} = K^{[0]}$

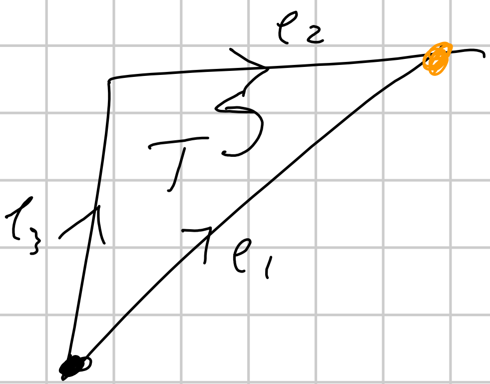
$\forall e \in K^{[1]}$ definisco:

$$\alpha(e) = \begin{cases} 1 & \text{se } e \in A^{[1]} \\ \begin{pmatrix}\text{cammino semplice in } A \\ \text{da } v_0 \text{ a } e_0\end{pmatrix} \cdot e \cdot \begin{pmatrix}\text{cammino semplice in } A \\ \text{da } v_0 \text{ a } e_1\end{pmatrix}^{-1} & \text{se } e \in K^{[1]} \setminus A^{[1]}. \end{cases}$$



Teo: $\pi_1(|K|) = \langle \alpha(\ell),\ \ell \in K^{[1]} \setminus A^{[1]} \mid r(T) : T \in K^{[2]} \rangle$

dove $r(T) = \alpha(e_1)^{\varepsilon_1} \cdot \alpha(e_2)^{\varepsilon_2} \cdot \alpha(e_3)^{\varepsilon_3}$ se il bordo di T è $e_1^{\varepsilon_1} \cdot e_2^{\varepsilon_2} \cdot e_3^{\varepsilon_3}$



$$\partial T = \underline{e_1 \cdot e_2^{-1} \cdot e_3^{-1}}$$

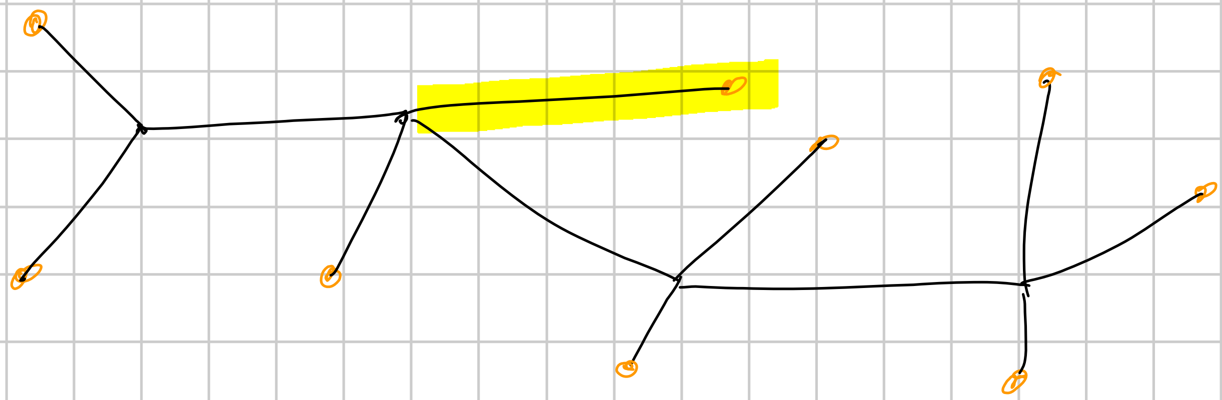
Oss: per scrivere $r(T)$ devo scegliere un inizio su ∂T ma se lo cambio trovo una parola coniugata

$$\underline{e_2^{-1} \cdot e_3^{-1} \cdot e_1} = e_1^{-1} \cdot \underline{(e_1 \cdot e_2^{-1} \cdot e_3^{-1})} \cdot e_1$$

$\Longrightarrow$ il gruppo è ben definito.

Dimo: Provo che $\pi_1(|\mathcal{A}|) = 1$. Per induzione su $\# \mathcal{A}^{[0]}$; se è 1 ho $\mathcal{A} = pt$ ✓.

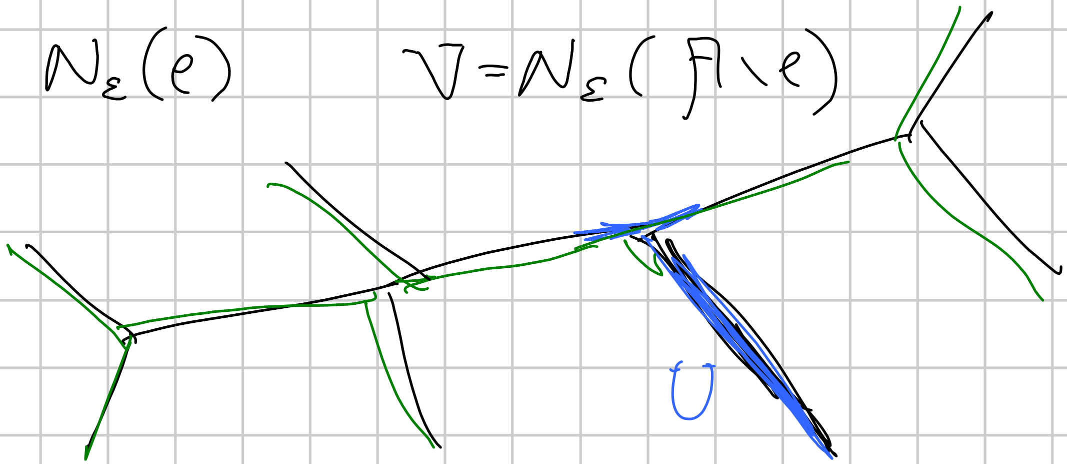
Affermo ora che $\mathcal{A}$ ha almeno un vertice libero, cioè $\exists v \in \mathcal{A}^{(0)}$ t.c. $\exists ! \, e \in \mathcal{A}^{[1]}$ con $e \ni v$.



Idea: lancio un cammino semplice: se non incontro vertici liberi posso proseguire all'∞; invece A è finito.

Ora si vede che $A \setminus \{e, v\}$ è un albero $\Rightarrow$ è s.c. per induzione: usiamo Van Kampen con

$U = N_\varepsilon(e)$ $\quad V = N_\varepsilon(A \setminus e)$



$\tilde{U}$ si retrae su e
V si retrae su $A \setminus e$
$U \cap V$ si retrae su un punto $\Rightarrow$ ok

(Anzi: A si retrae su $A \setminus e$ ___) (DA FINIRE)