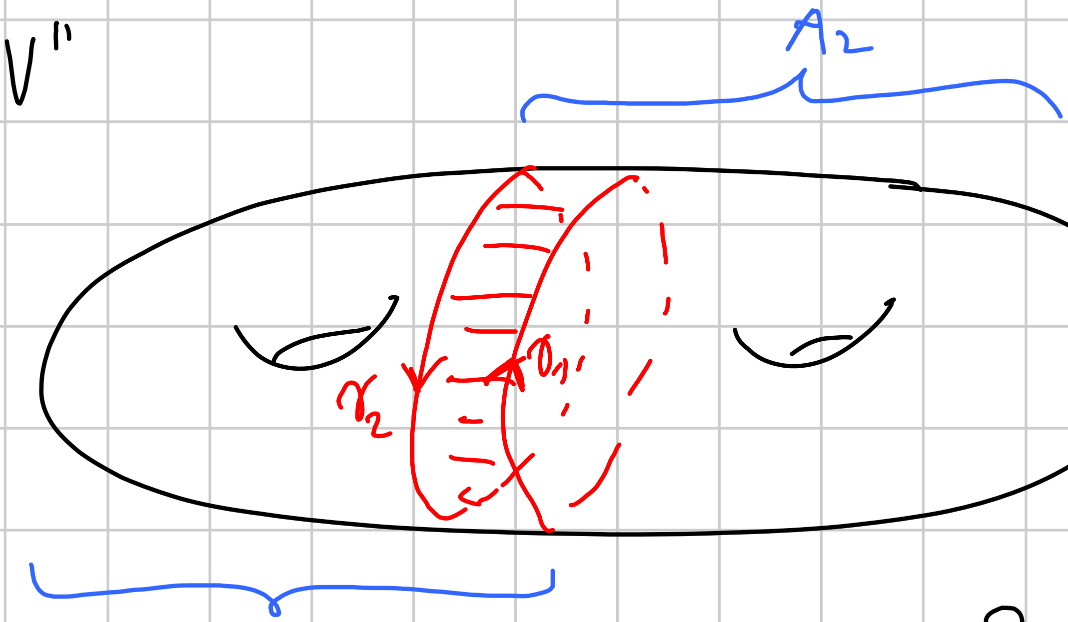
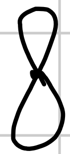
ETA 14/11/5

"d in M-V"

<u>Es</u>: $X =$



$A_1 \simeq A_2 \simeq$ 

$H_2 = 0$

$H_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$\tilde{H}_0 = 0$

$$A_1 \cap A_2 \simeq \bigcirc$$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H_2(A_1)\oplus H_2(A_2)} \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{Z}_{[X]}}}{H_2(X)} \xrightarrow{d} H_1(\underbrace{A_1 \cap A_2}_{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{i} H_1(A_1)\oplus H_1(A_2) \xrightarrow{j} H_1(X) \to \tilde{H}_0(Z) = 0$$

$$0 \quad \mathbb{Z} \quad 0$$

d: spezza tra A_1 e A_2 come vuoi (differenziato)

prendi il bordo del primo addendo = bordo secondo

I modo: $[X] = A_1 - \left(-\overline{A_2 \setminus Z}\right)$

$$d([X]) = \partial A_1 = \gamma_1 = \partial\left(-\overline{A_2 \setminus Z}\right)$$

II modo $\quad [X] = \overline{A_1 \setminus Z} - (-A_2)$

$$d([X]) = \partial(\overline{A_1 \setminus Z}) = -\gamma_2 = \partial(-A_2)$$

Torna: $[\gamma_1] = [\gamma_2]$. Poiché d è surgettivo ottengo j isomorfismo $\Longrightarrow H_1(X) \cong \mathbb{Z}^4$.

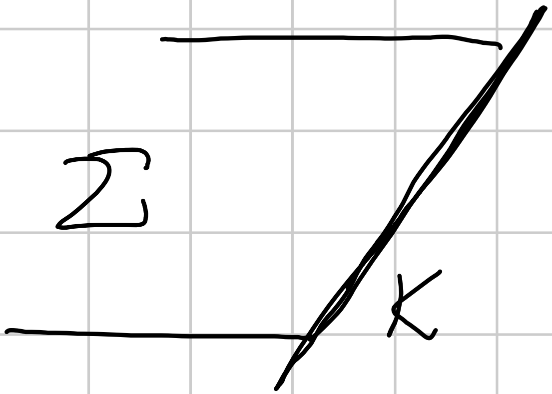
Visto: K nodo in $S^3 \Longrightarrow$ esiste una longitudine su ∂U che è nulla in $H_1(E)$

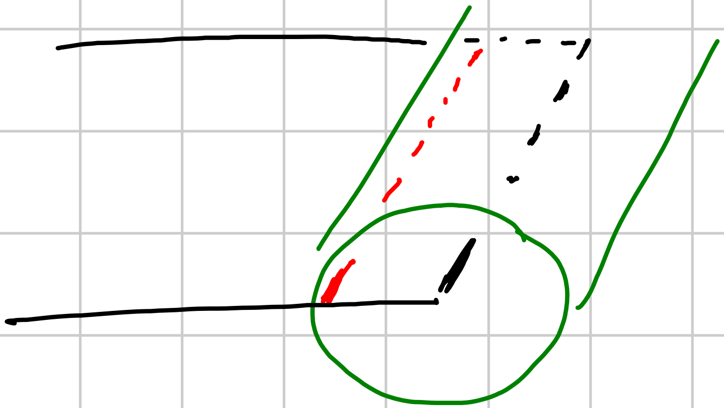
U = intorno tub. $\quad E = S^3 \setminus \mathring{U}$.

Come si trova geometricamente?

Oss 1: se una curva su ∂U borda una superficie orientata in E allora è lei

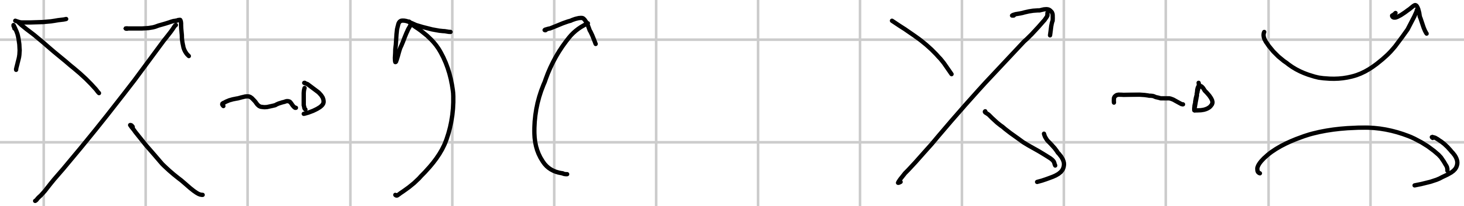
Oss 2: se provo che K stesso è bordo di una sup. orientata $\Sigma \hookrightarrow S^3$ basta prendere come longitudine giusta la copia parallela di K su Σ (cioè $\Sigma \cap \partial U$):





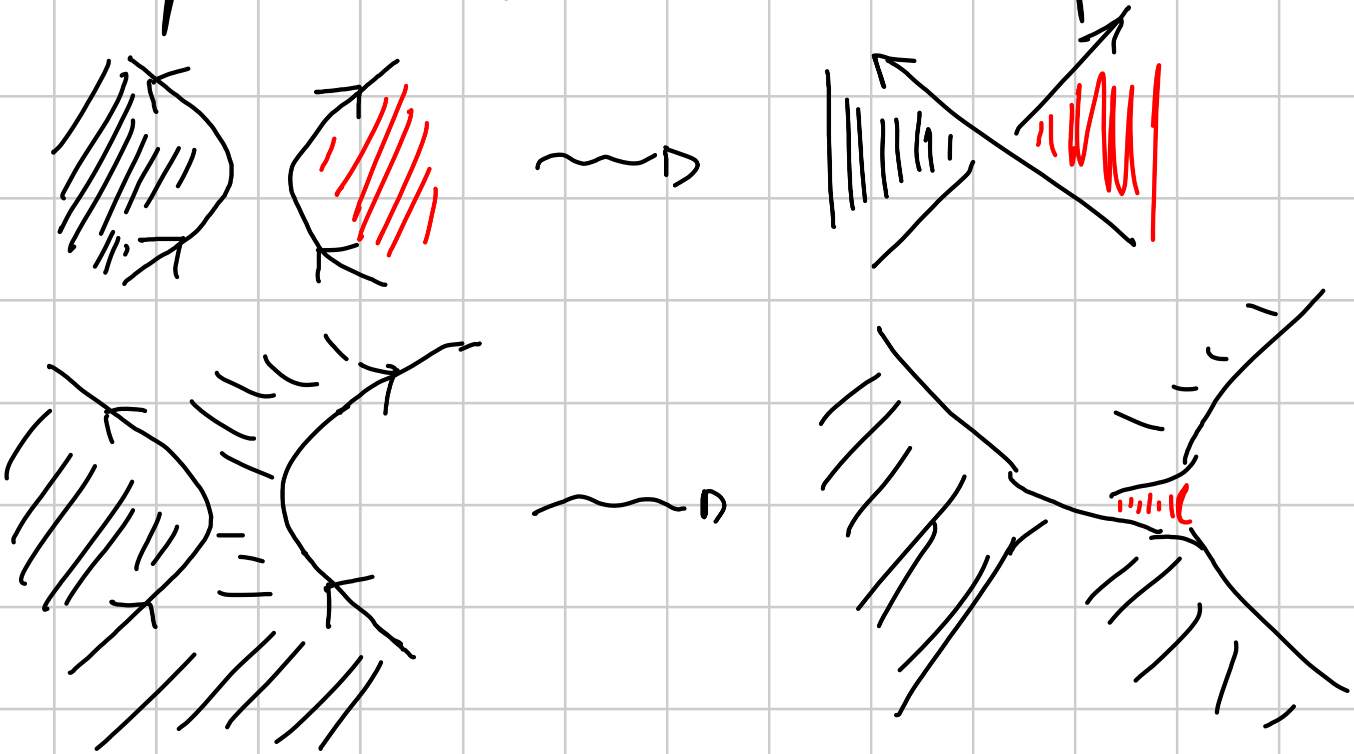
Costruzione di tale Σ (Superficie di Seifert):

- orientare K (uso una proiezione su un piano)
- sciogliere gli incroci usando l'orientazione:



- ora ho una collezione di circonf; scelgo dischi orientati da esse bordati ad altezze diverse

- ripristino incroci creando la sup:



Altre applicaz. di M-V:

2) $H_2(S^3 \setminus K)$

$$\underset{\overset{\|}{0}}{H_3(E)} \oplus \underset{\overset{\|}{0}}{H_3(U)} \to \underset{\overset{\|}{\mathbb{Z}}}{H_3(S^3)} \xrightarrow{d} \underset{\overset{\|}{\mathbb{Z}}}{H_2(\partial U)} \longrightarrow \underset{\overset{\uparrow}{?}}{H_2(E)} \oplus \underset{\overset{\|}{0}}{H_2(U)} \to \underset{\overset{\|}{0}}{H_2(S^3)}$$

$d([S^3])$ si ottiene esprimendo $S^3 \doteq E - (-U)$
e prendendo $\partial E = \partial(-U)$ generatore di
$H_2(\partial U) \Rightarrow d$ isomorf.
$\Rightarrow H_2(E) = H_2(S^3 \setminus K) = 0$

<u>O</u>ss: esistono 3-var. con ∂ aventi $H_2 \neq 0$ $\quad (\Sigma \times I)$

3) $M^{(n)}$ chiusa, $n \geq 3$, $N = M \setminus B^3 \simeq N \setminus \{pt\}$

$M = N \cup D^3$

$$\underbrace{H_1(S^2)}_{=0} \to H_1(N) \oplus \underbrace{H_1(D^3)}_{=0} \to H_1(M) \to \underbrace{\tilde{H}_0(S^2)}_{=0}$$

$$\Longrightarrow H_1(N) \cong H_1(M)$$

(vero anche per $M^{(2)}$ orientabile; però falso per M non orientabile; falso togliendo ≥ 2 punti).

(4) $M^{(3)}$ chiusa orientata ; $N = M \setminus B^3$; $H_2(N)$

$$H_3(D^3)\oplus H_3(N) \to H_3(M) \to H_2(S^2) \to H_2(D^3)\oplus H_2(N) \to H_2(M) \to H_1(S^2)$$

$$H_3(D^3) = 0, \quad H_3(N) = 0, \quad H_3(M) = \mathbb{Z}_{[M]}, \quad H_2(S^2) = \mathbb{Z}_{[S^2]}, \quad H_2(D^3) = 0, \quad H_2(N) = \,?, \quad H_1(S^2) = 0$$

come sopra; isomorfismo

$\Rightarrow$ isomorfismo

—— o ——

Proprietà assiomatiche di H_* :

0. E' un funtore covariante

$$\begin{pmatrix} \text{Obj: coppie } (K, L), \\ \text{mappe } (K, L) \to (M, N) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{Obj: } (G_n)_{n=0}^{+\infty} \\ \text{Hom: } (\varphi_n)_{n=0}^{+\infty} \end{pmatrix}$$

I. Omotopia

$f_0 \simeq f_1$ (come mappe $(K, L) \to (M, N)$)

$\Longrightarrow f_{0*} = f_{1*}$

II. Escissione : $X = Y_1 \cup Y_2$, $Z = Y_1 \cap Y_2$

$\Longrightarrow H_*(X, Y_2) = H_*(Y_1, Z)$

III. LES

$\ldots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A) \to \ldots$

IV. Dimensione:

$$H_n(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

V. 0-omotopia: $H_0(X) = \mathbb{Z}^{\#\text{comp. connesse}}$

Oss: (1) Mayer-Vietoris segue

(2) Bastano per calcolare $H_n(S^m) \cong H_n(D^m, S^{m-1})$.

Def: Siano $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorie e $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ funtori covarianti. Chiamo trasformazione naturale da F a G il dato di $\varphi_A : F(A) \to G(A)$ $\forall A \in Obj(\mathcal{C})$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "F(h)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G(A) \arrow[d, "G(h)"] \\
F(B) \arrow[r, "\varphi_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

$\forall A, B \in Obj(\mathcal{C})$, $\forall h \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$

Se gli oggetti di $\mathcal{C}'$ hanno struttura e ogni φ_A è un isomorfismo, lo diciamo isomorfismo nat.

Teo: sia H' un funtore come H con gli assiomi I-V e sia $\varphi : H \to H'$ una trasformazione naturale t.c. $\varphi_{\{pto\}}$ sia isomorfismo. Allora φ è un isomorfismo naturale.

Dimo: Bisogna vedere che ogni $\varphi_{(X,A)}$ è isomorfismo. Comincio da $A = \emptyset$. Ho $X = |K|$ e lo provo per induzione su $\# K$. Se $\# K = 1$ allora $X = pt$: OK. Per $\# K \geq 2$ prendo $\sigma \in K^{(p)}$, p massimale. Pongo $L = K \setminus \{\sigma\}$ è un sottocompl. Inoltre

$$H_*(K, L) \underset{\text{escissione}}{=} H_*(\sigma, \partial\sigma) = H_*(D^p, D^{p-1})$$

e lo stesso per H'_* grazie agli assiomi. Ora:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \to H_{n+1}(K, L) & \to & H_n(L) & \to & H_n(K) & \to & H_n(K, L) & \to & H_{n-1}(L) & \to \cdots \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & \\
H'_{n+1}(K, L) & \to & H'_n(L) & \to & H'_n(K) & \to & H'_n(K, L) & \to & H'_{n-1}(L) & \to \cdots
\end{array}$$

isomorf. per omologie sfere

isomorf. per ipotesi induttiva

Si conclude con:

5-lemma: se

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{\ell} & E \\ \alpha\downarrow & \circlearrowright & \downarrow\beta & \circlearrowright & \downarrow\gamma & \circlearrowright & \downarrow\delta & \circlearrowright & \downarrow\varepsilon \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{\ell'} & E' \end{array}$$

- righe esatte
- $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ isomorfismi

$\Longrightarrow$ γ isomorfismo _

(Dim. poi.) Caso relativo:

$$\begin{tikzcd}
H_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(X) \arrow[d] \\
H'_n(A) \arrow[r] & H'_n(X) \arrow[r] & H'_n(X,A) \arrow[r] & H'_{n-1}(A) \arrow[r] & H'_{n-1}(X)
\end{tikzcd}$$

isomorfismi per caso assoluto.

$$\begin{tikzcd}
{\color{red}a}\,A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & {\color{red}b}\,B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & {\color{red}c}\,C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\
{\color{red}a'}\,A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r, "k'"] & D' \arrow[r, "\ell'"] & E'
\end{tikzcd}$$

γ iniettiva: sia $c \in C$ con $\gamma(c) = 0$

$\Rightarrow \delta(k(c)) = 0 \Rightarrow k(c) = 0$ (δ iniettivo) $\Rightarrow c = j(b)$

(esattezza in C) $\Rightarrow j'(\beta(b)) = \gamma(j(b)) = \gamma(c) = 0$

$\Rightarrow \beta(b) = i'(a')$ (esattezza in B')

$\Rightarrow a' = \alpha(a)$ (α surgettivo)

$\Rightarrow \beta(i(a)) = i'(\alpha(a)) = i'(a') = \beta(b)$

$\Rightarrow b = i(a)$ (β iniettivo)

$\Rightarrow c = j(b) = j(i(a)) = 0$ (esattezza in B)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r, "k'"] & D' \arrow[r, "\ell'"] & E'
\end{tikzcd}$$

b c d b' c'

γ suriettivo:

Sia $c' \in C'$ $\Rightarrow k'(c') = \delta(d)$ (δ suriettivo)

$\Rightarrow \varepsilon(\ell(d)) = \ell'(\delta(d)) = \ell'(k'(c')) = 0$ (esattezza in D')

$\Rightarrow \ell(d) = 0$ (ε iniettivo) $\Rightarrow d = k(c)$

$\Rightarrow k'(c' - \gamma(c)) = \delta(d) - \delta(k(c)) = 0$

$\Longrightarrow c' - \gamma(c) = j'(b')$ (esattezza in C'')

$\Longrightarrow b' = \beta(b)$ (surgettivo)

$\Longrightarrow c' - \gamma(c) = j'(\beta(b)) = \gamma(j(b))$

$\Longrightarrow c' = \gamma(c + j(b))$.

$\blacksquare$