UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 9/9/16 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se una matrice 2×2 a coefficienti interi ha un autovalore intero, si può concludere che è intero anche l'altro autovalore? Spiegare.

2. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} t^2 & t-1 & t+1 \\ 0 & t & t \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix}$ sia diagonalizzabile.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitarî, con somma delle coordinate reale e ortogonali a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-2i \end{pmatrix}$.

4. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ esista una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ composta di autovettori di $\begin{pmatrix} 1-t & t+2 \\ t^2 & 1+2t \end{pmatrix}$.

5. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ la quadrica $x^2 - (1+t)y^2 + (t-2)z^2 = 1$ sia un iperboloide ellittico.

6. Considerando $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ come la retta all'infinito di $\mathbb{R}^2$, trovare il punto all'infinito della retta in $\mathbb{R}^2$ passante per $(3,8)$ e $(-2,5)$

7. Calcolare $\int_\alpha (4y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ 1 - 3t^2 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 9/9/16 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare i sottospazî $X = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ e $Y = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$.

(A) (4 punti) Esibire le matrici A e B delle proiezioni ortogonali di $\mathbb{R}^3$ su X e su Y.

(B) (4 punti) Posto $C = \frac{3}{2}A + \frac{11}{2}B$, senza calcolare C provare che ha l'autovalore 7 ed esibire un relativo autovettore.

(C) (4 punti) Trovare gli altri autovalori di C e provare che è diagonalizzabile, esibendo una base di autovettori.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(u) = \begin{pmatrix} u + e^{2u} \\ u^3 - u^2 + 2u \\ 2u^3 + u^2 - u \end{pmatrix}$

(A) (1 punto) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (4 punti) Determinare il riferimento di Frénet per α nel punto $u = 0$.

(C) (4 punti) Calcolare la curvatura e la torsione di α nel punto $u = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta 2\cos(2x - y)\,\mathrm{d}x - \cos(2x - y)\,\mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♢

1. Sì: la somma dei due autovalori è la traccia, che è intera

2. t diverso da 0 e da -1

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+i \end{pmatrix}$

4. $t=-1$ e $t=2$

5. $-1<t<2$

6. $[5:3]$

7. $-\frac{9}{2}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

(B) Posto $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha $X = x^\perp$ e $Y = y^\perp$, dunque $z = x \wedge y$ appartiene sia a X sia a Y, e allora $Az = z$ e $Bz = z$, da cui $Cz = 7z$; inoltre $z = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, dunque si può scegliere l'autovettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) Gli altri autovalori di C sono 1 e 6, con relativi autovettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.

(A) La prima componente di α ha derivata sempre positiva.

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{5\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 19 \\ -20 \\ 17 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{5\sqrt{3}}{7\sqrt{14}}$, $\tau = -\frac{53}{75}$

(D) $\sin\left(2\,\mathrm{e}^2\right) - \sin(2)$