"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 16/9/00

Nome __________ **Cognome** __________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. È vero che è nullo l'integrale della forma $((1+z)/z^2)\,\mathrm{d}z$ sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{C}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

2. Se ω_0 e ω_1 sono 1-forme in $\mathbb{R}^2$ e $\mathrm{d}\omega_0 = \mathrm{d}\omega_1$, si può concludere che $\omega_0 = \omega_1$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

3. L'equazione differenziale $x'' + x' + 2x = 0$ ha soluzioni non costanti e limitate su $[0, \infty)$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

4. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa non costante e $k \in \mathbb{N}$ tale che $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \geq k$. È vero che $f(z) = 0$ solo per un numero finito di z in $\mathbb{C}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

5. È vero che se f, olomorfa da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, ha in $z_0 \in \mathbb{C}$ uno zero semplice, e $g(z) = 1/(f(z))^2$, allora g ha un polo di residuo nullo in z_0? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

6. Si consideri il prodotto scalare definito da $\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ nello spazio delle funzioni continue sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Esiste una funzione continua e non nulla ortogonale a tutte le funzioni pari e a tutte le funzioni dispari? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

7. Per quanti $k \in \mathbb{R}$ la forma $(x + ky^2)\,\mathrm{d}x + (xy - k^2y^2)\,\mathrm{d}y$ ammette un potenziale su $\mathbb{R}^2$?
$\boxed{\text{A}}$ Per nessun k. $\boxed{\text{B}}$ Per ogni k. $\boxed{\text{C}}$ Per un solo valore di k; $\boxed{\text{D}}$ Per due valori di k.

8. Sia $\alpha(t) = (t\cos(t), t\sin(t))$ per $t \in [0,1]$ e sia $f(x,y) = 3\sqrt{1 + x^2 + y^2}$. Quanto fa $\int_\alpha f$?
$\boxed{\text{A}}$ 1. $\boxed{\text{B}}$ 2. $\boxed{\text{C}}$ 4. $\boxed{\text{D}}$ π.

9. Sia $f(x,y) = x^2y^3$. Quanto fa $\mathrm{d}f$? $\boxed{\text{A}}$ $2xy^3\,\mathrm{d}x + 3x^2y^2\,\mathrm{d}y$. $\boxed{\text{B}}$ $2xy^3\,\mathrm{d}y + 3x^2y^2\,\mathrm{d}x$.
$\boxed{\text{C}}$ $2xy^3 + 3x^2y^2$. $\boxed{\text{D}}$ Nessuna delle precedenti.

10. Si consideri la successione $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tale che $a_{n+2} = 2a_{n+1}/a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$. Quanto fa a_{36}?
$\boxed{\text{A}}$ 2. $\boxed{\text{B}}$ 0. $\boxed{\text{C}}$ $\pi/2$. $\boxed{\text{D}}$ 4.

11. Per quali polinomi $p(z)$ la funzione $1/p(z)$ è olomorfa da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$?
$\boxed{\text{A}}$ Per tutti i $p(z)$ di grado 2. $\boxed{\text{B}}$ Per tutti i $p(z)$.
$\boxed{\text{C}}$ Per tutti i $p(z)$ a coefficienti reali. $\boxed{\text{D}}$ Solo per $p(z)$ costante.

12. Esiste una $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $f(z) \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$? $\boxed{\text{A}}$ No.
$\boxed{\text{B}}$ Sì, ad esempio l'identità. $\boxed{\text{C}}$ Sì, ma solo la funzione nulla. $\boxed{\text{D}}$ Sì, tutte le costanti.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono ± 2 punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

Risposte esatte

1. F
2. F
3. V
4. V
5. V
6. F
7. C
8. C
9. A
10. A
11. D
12. D