"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 6 novembre 1999

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ⌴⌴⌴⌴⌴⌴

1. L'applicazione $\Phi : \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ data da $\Phi(f) = f(0) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ è lineare? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

2. Sia $v\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^2 \cdot \mathrm{e}^{x_3} \\ x_1^2 \cdot x_2 \cdot \mathrm{e}^{x_3} \end{pmatrix}$. Il rotore di v è ovunque nullo? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

3. Il punto $(0,0)$ è critico per la funzione $2\sin(x) - \mathrm{e}^{x-y}$ sulla curva di equazione $\log(1+x+y) = 2\sin(y)$ nel piano? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

4. Sia $C = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ e sia $v : C \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale definito su C. Supponiamo che $\langle v|n\rangle = 0$ su tutto ∂C, dove n rappresenta la normale esterna a C. Se ne può dedurre che $\mathrm{div}(v) = 0$ ovunque in C? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

5. Sia $Q = [0,1] \times [0,1]$ e sia $v(x,y) = (x \cdot \cos(\pi y/2), \sin(\pi y) \cdot \mathrm{e}^{xy})$. È vero che $\int_Q \mathrm{div}(v) = 0$? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

6. Sapendo che $x(t) = t^2$ risolve l'equazione differenziale $x'' - \frac{2}{t^2} \cdot x = 0$, consideriamo la soluzione y della medesima equazione tale che $y(1) = 1$ e $y'(1) = -1$. La y ha una singolarità in 0? (Suggerimento: utilizzare il metodo della variazione delle costanti.) $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

7. Sia $k > 0$ e $D_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le k\}$. È finito l'integrale $\int_{D_k} (x^2+y^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$?

$\boxed{\mathrm{a}}$ sì; $\boxed{\mathrm{b}}$ no; $\boxed{\mathrm{c}}$ dipende da k; $\boxed{\mathrm{d}}$ l'integrale non ha significato.

8. Sia ℓ la lunghezza della curva $\alpha(t) = (2t, t^2)$ con $t \in [0,1]$. Quale delle seguenti è giusta?

$\boxed{\mathrm{a}}$ $\ell \le 1$; $\boxed{\mathrm{b}}$ $1 < \ell \le 2$; $\boxed{\mathrm{c}}$ $2 < \ell < 4$; $\boxed{\mathrm{d}}$ $\ell \ge 4$.

9. Sia D l'operatore di derivazione su $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$. Esso è:

$\boxed{\mathrm{a}}$ bigettivo; $\boxed{\mathrm{b}}$ surgettivo ma non iniettivo;
$\boxed{\mathrm{c}}$ iniettivo ma non surgettivo; $\boxed{\mathrm{d}}$ né iniettivo né surgettivo.

10. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x,y) = (x^3 + y, x^3 - y)$

$\boxed{\mathrm{a}}$ non è iniettiva; $\boxed{\mathrm{b}}$ non è surgettiva; $\boxed{\mathrm{c}}$ è bigettiva ma la sua inversa non è di classe C^1;
$\boxed{\mathrm{d}}$ è bigettiva e la sua inversa è di classe C^1.

11. Sia $\omega(x,y) = x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$. Siano $\alpha(t) = (t,t)$ e $\beta(t) = (\cos(\pi t/2), 1 - \sin(\pi t/2))$ per $t \in [0,1]$. Quanto fa $\int_\alpha \omega + \int_\beta \omega$?

$\boxed{\mathrm{a}}$ $1 - \pi/2$; $\boxed{\mathrm{b}}$ 0; $\boxed{\mathrm{c}}$ $1 + \pi/2$; $\boxed{\mathrm{d}}$ nessuna delle precedenti.

12. Sia x la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} x''' - x'' + x' - x = 0 \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 2 \end{cases}$. Quanto fa $\lim_{t\to+\infty} x(t)$?

$\boxed{\mathrm{a}}$ non esiste ; $\boxed{\mathrm{b}}$ 0; $\boxed{\mathrm{c}}$ $-\infty$; $\boxed{\mathrm{d}}$ $+\infty$.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono ± 2 punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

Risposte esatte

1. V
2. F
3. F
4. F
5. F
6. V
7. a
8. c
9. b
10. c
11. a
12. d