

Capitolo 3

Alcuni problemi interessanti

3.1 Modelli di crescita della popolazione

Nel caso di problemi biologici i fenomeni evolvono generalmente in maniera discreta. Però se la popolazione su cui si studia il fenomeno è sufficientemente numerosa, è ragionevole esprimere i cambiamenti delle variabili in esame con delle derivate, ottenendo così dei modelli continui.

3.1.1 L'equazione logistica

Il modello più semplice per studiare la densità di popolazione $y(x)$, cioè il numero di individui di una specie al tempo x , prevede che la velocità di accrescimento y'/y sia costante al variare di x . Questo modello porta all'equazione differenziale

$$y' = \alpha y, \quad \alpha > 0 \text{ costante.} \quad (3.1)$$

Ogni funzione della forma $y(t) = c e^{\alpha x}$, con c costante arbitraria, è soluzione di (3.1). Supponendo che al tempo $x = 0$ la densità sia y_0 , risulta

$$y(x) = y_0 e^{\alpha x}.$$

Quindi la legge di accrescimento risulta esponenziale.

Per ottenere un modello più aderente alla realtà bisogna però tenere conto di fattori limitanti di crescita, ad esempio del fatto che le risorse disponibili siano limitate. Si suppone allora che la velocità di accrescimento non resti costante ma diminuisca al crescere della densità. Il modello più semplice prevede che la diminuzione sia lineare. Si ottiene così l'equazione *logistica*

$$y' = y (\alpha - \beta y), \quad \alpha, \beta > 0 \text{ costanti.} \quad (3.2)$$

Esaminiamo ad esempio il caso $\alpha = 20$, $\beta = 0.2$, supponendo che la densità iniziale sia $y(0) = 10$.

```

>> f=inline('y*(20-0.2*y)', 'x', 'y');
>> y0=10;
>> a=0; b=0.5;
>> [x,u]=ode45(f, [a,b], y0);
>> plot(x,u)

```

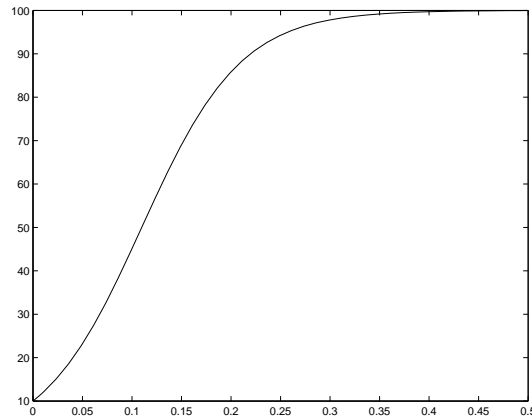


Figura 3.1: Soluzione dell'equazione logistica.

La soluzione ha una forma caratteristica, come si vede dalla figura 3.1. All'inizio l'accrescimento è rapido, poi $y(x)$ tende a stabilizzarsi sul valore α/β , detto *capacità portante*. Questo modello consente di rispondere a domande del tipo: quanto tempo occorre perché la densità sia superiore al 90% della capacità portante? che succede se inizialmente la densità è superiore alla capacità portante?

Problemi

- Sperimentalmente si è verificato che in una colonia di batteri la densità raddoppia in 4 ore e raddoppia di nuovo nelle successive 8 ore. Determinare i valori dei parametri del modello che descrivono questa situazione. Qual è il massimo numero di batteri a cui può arrivare la colonia?
- Vi sono molti esempi reali in cui la velocità di accrescimento non è costante nel tempo. Un esempio tipico è quello in cui si alternano periodi di maggiore o minore fertilità (andamento stagionale, oppure andamento periodico). In questo caso il modello (3.2) va così modificato

$$y' = y(f(x) - \beta y),$$

per un'opportuna $f(x)$. Si esamini per esempio il caso stagionale in cui

$$f(x) = \begin{cases} \theta & \text{se } i \leq x < i + 1, \quad \text{mod}(i, 4) = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Un altro problema interessante è quello di studiare la densità di popolazione quando vi è un prelievo costante di individui (ad esempio, può essere importante sapere

come varia il numero dei merluzzi del Mare del Nord, soggetti a una pesca regolare). Per ottenere un modello adeguato si modifica la (3.2) con una costante $\gamma > 0$ nel modo seguente

$$y' = y(\alpha - \beta y) - \gamma.$$

Al variare di γ in relazione agli altri parametri si possono avere varie situazioni. È anche possibile, se γ è grande, che la specie si estingua. Studiare i vari casi possibili.

3.1.2 Modello di Lotka-Volterra di competizione fra specie

Se vi sono due specie in competizione per le risorse di uno stesso territorio, non possiamo usare l'equazione logistica separatamente per le due specie. Occorre invece costruire un unico modello che tenga conto dei fattori limitanti di crescita in modo incrociato. In pratica la velocità di accrescimento di ciascuna specie diminuisce al crescere della densità sia della specie stessa che dell'altra specie. Se la funzione che si usa per descrivere la velocità di accrescimento è lineare, si ottiene il modello di Lotka-Volterra. Siano $y_1(x)$, $y_2(x)$ le due densità. Il modello proposto è

$$\begin{cases} y_1' = y_1 (\alpha - \beta y_1 - \gamma y_2) \\ y_2' = y_2 (\alpha' - \beta' y_1 - \gamma' y_2), \end{cases} \quad (3.3)$$

dove tutti i parametri sono delle costanti positive. Esaminiamo un caso interessante: $\alpha = 3$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.7$, $\alpha' = 2$, $\beta' = 0.5$, $\gamma' = 0.5$. Supponiamo che la densità iniziale sia $y_1(0) = 2$ e $y_2(0) = 5$.

```
>> f=inline(' [y(1)*(3-0.5*y(1)-0.7*y(2));y(2)*(2-0.5*y(1)-0.5*y(2))] ', ...
            , 'x', 'y');
>> [x,u]=ode45(f, [0,10], [2,5]);
>> plot(x,u(:,1), 'k-', x,u(:,2), 'k--')
```

I grafici delle due densità sono riportati in figura 3.2, con linea continua quello relativo alla prima specie, con linea tratteggiata quello relativo alla seconda specie. Appare evidente che la prima specie, anche se meno numerosa all'inizio, supera la seconda, che alla fine si estingue. Questo si spiega con il maggior valore del parametro α , che rappresenta la prolificità della specie. Naturalmente altre situazioni si possono presentare, al variare dei parametri.

Sulla base di simulazioni come quella vista, i biologi hanno formulato un principio di *esclusione*, per cui se due specie si trovano a competere per le stesse risorse sullo stesso territorio, una delle due certamente finisce per estinguersi.

Problema

- Dopo quanto tempo nel caso visto le due specie hanno la stessa densità? È possibile che cambiando il solo parametro γ , che misura come la presenza della seconda specie interagisce con la crescita della prima, cambi la situazione finale?

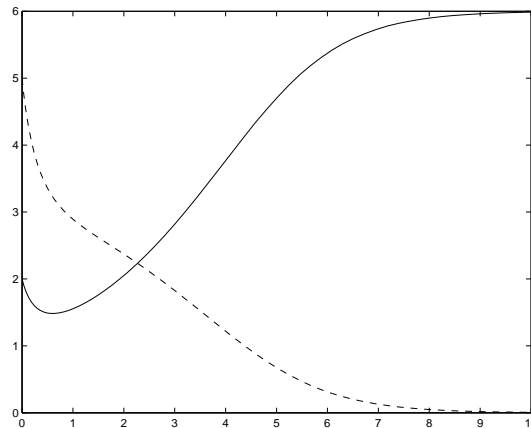


Figura 3.2: Competizione fra specie.

3.1.3 Modello di Lotka-Volterra di predazione fra specie

Se le due specie presenti sul territorio non sono in competizione per le stesse risorse, ma una delle due (per esempio la seconda, che chiameremo predatore) usa come risorsa l'altra (che chiameremo preda), il modello usato nel caso precedente deve essere modificato. Per i predatori si suppone che la velocità di accrescimento cresca con il numero delle prede e che sia negativa se non ci sono prede. Si ha quindi il modello

$$\begin{cases} y_1' = y_1 (\alpha - \beta y_1 - \gamma y_2) \\ y_2' = y_2 (-\alpha' + \beta' y_1), \end{cases} \quad (3.4)$$

Esaminiamo ad esempio il caso $\alpha = 1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.2$, $\alpha' = 0.2$, $\beta' = 0.1$. Supponiamo che le densità iniziali siano entrambe 1.

```
>> f=inline(' [y(1)*(1-0.1*y(1)-0.2*y(2));y(2)*(-0.2+0.1*y(1))]','x','y');
>> [x,u]=ode45(f,[0,30],[1,1]);
>> plot(x,u(:,1),'k-',x,u(:,2),'k--')
```

Si ottengono i grafici della figura 3.3 (con linea continua quello relativo alla preda, con linea tratteggiata quello relativo ai predatori). Appare evidente che inizialmente si producono delle oscillazioni in cui vi è un certo ritardo nella crescita o decrescita dei predatori rispetto alle prede. Alla fine le due popolazioni tendono a stabilizzarsi.

Problemi

- Esistono valori dei parametri per cui le prede si estinguono (in tal caso anche i predatori si estinguerebbero)? È possibile che i predatori si estinguano e le prede no?

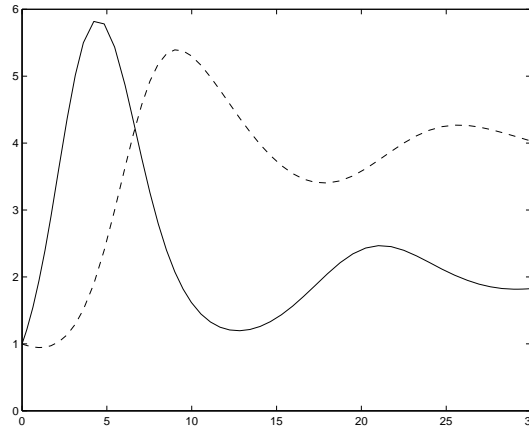


Figura 3.3: Predazione fra specie.

3.1.4 Modello dell'epidemia

Si suppone che al tempo x ci siano $y_1(x)$ individui non ancora contagiati (e perciò suscettibili di essere contagiati), $y_2(x)$ individui malati e $y_3(x)$ individui guariti (e perciò non più contagiabili). Il modello seguente si basa sull'ipotesi che ad ogni istante il numero di nuovi contagiati sia proporzionale sia al numero di individui non ancora contagiati che al numero di malati e che il numero di guarigioni sia proporzionale al numero di malati.

$$\begin{cases} y_1' = -\alpha y_1 y_2 \\ y_2' = \alpha y_1 y_2 - \beta y_2 \\ y_3' = \beta y_2. \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0.$$

Esaminiamo ad esempio il caso $\alpha = 0.01$ e $\beta = 0.1$, supponendo che un individuo malato contagi una comunità di 200 individui.

```
>> f=inline('[-0.01*y(1)*y(2);0.01*y(1)*y(2)-0.1*y(2);0.1*y(2)]'...
            , 'x', 'y');
>> [x,u]=ode45(f, [0,20], [199,1,0]);
>> plot(x,u(:,1),'k-',x,u(:,2),'k--',x,u(:,3),'k:')
```

Si ottengono i grafici di densità della figura 3.4 (con linea continua grafico degli individui non ancora contagiati, con linea tratteggiata quello degli individui malati e con i puntini quello degli individui guariti). All'inizio vi è un rapido aumento del contagio fino a che non vi sono più individui non contagiati, poi il numero dei guariti prende il sopravvento.

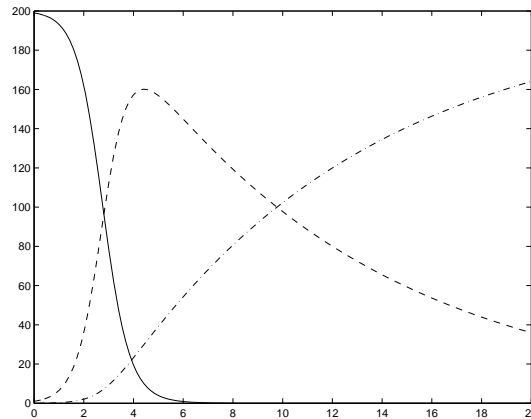


Figura 3.4: Andamento di una epidemia.

Problemi

- Gli epidemiologi sono interessati a trovare dopo quanto tempo dall'inizio si verifica il picco dell'epidemia, cioè il massimo della curva $y_2(x)$. Si dica quando si verifica in questo caso e se ne dia un'espressione generale dipendente da a e b .
- Il modello precedente non è molto realistico perché trascura il fatto che difficilmente si verifica il contagio se non vi è un numero minimo di persone contagiabili e di contagiati. Come andrebbe modificato il modello per tener conto di questa ulteriore condizione. E se volessimo tener conto della possibilità che si verificino dei decessi?

3.2 Modelli dinamici

Per la prima legge della dinamica, la posizione $y(x)$ al tempo x di un punto materiale P di massa m soggetto ad una forza $f(x)$ è descritto dall'equazione differenziale

$$m y'' = f(x). \quad (3.5)$$

La funzione $y(x)$ descrive quindi il moto di P . Vediamo adesso alcuni esempi semplici e particolarmente significativi di moto di un punto.

3.2.1 Il problema del paracadutista

Il moto un punto materiale P di massa m soggetto alla sola forza di gravità è descritto dall'equazione (3.5), in cui $f(x) = -mg$ è la forza di gravità. Se si suppone che al tempo iniziale P si trovi ad un'altezza α e abbia una velocità nulla, cioè $y(0) = \alpha$ e $y'(0) = 0$, si ha che $y(x) = \alpha - gx^2/2$. Quindi P toccherebbe il suolo al tempo $x = \sqrt{2\alpha/g}$. Ad esempio un uomo che si lanciasse da un'altezza di 1000 metri, arriverebbe a terra in circa 14 secondi. La sua velocità però sarebbe tale da farlo sfracellare.

Chiaramente il modello adottato non è adeguato a descrivere il moto di un paracadutista, che invece arriva indenne al suolo. Si deve tenere conto anche del fatto che P si muove in un mezzo viscoso (l'aria) che si oppone al moto con una forza proporzionale alla velocità di P stesso. Il modello diviene allora

$$my'' = -mg - ky', \quad \text{con } k > 0.$$

Ponendo $y_1(x) = y(x)$ e $y_2(x) = y'(x)$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -k/m y_2 - g \end{cases}$$

Esaminiamo ad esempio il caso $m = 1$ e $k = 2.5$.

```
>> f=inline(' [y(2);-2.5*y(2)-9.8] ', 'x', 'y');
>> [x,u]=ode45(f, [0,2.5], [1000,0]);
>> plot(x,u(:,2), 'k')
```

Il grafico di $y_2(x)$ è quello indicato nella figura 3.5. È evidente che la velocità non

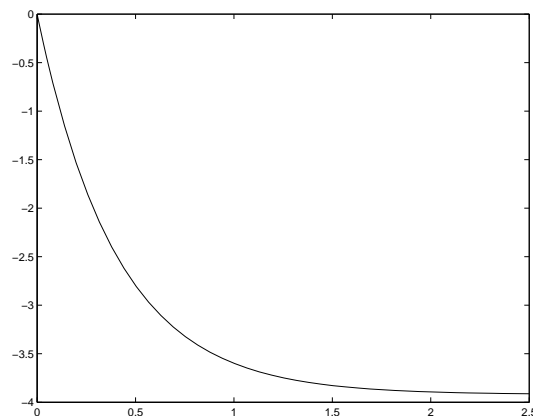


Figura 3.5: Velocità del paracadutista.

crebbe indefinitamente come nel caso del modello precedente ma ha un asintoto, detto *velocità limite*, in questo caso di circa 4 m/sec, che consente al paracadutista di arrivare indenne.

Problema

- Il moto di un paracadutista in caduta libera è descritto dal modello $my'' = -mg - ky'^2$. Si studi il moto di un paracadutista che si lancia da un'altezza α e apre il paracadute solo quando si trova ad un'altezza β dal suolo.

3.2.2 Il pendolo semplice

Un pendolo semplice è costituito da un punto P di massa m sospeso per mezzo di un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza l ad un punto fisso O . Si sposta P dalla posizione verticale V di un angolo α e lo si lascia andare con velocità nulla: chiaramente P si muove lungo un arco del cerchio di centro O , oscillando attorno al punto V . Si suppone in un primo tempo che su P agisca solo la forza di gravità. Indicato con $y(x)$ l'angolo formato dall'asta del pendolo con la verticale, il moto è descritto dall'equazione differenziale

$$y'' = -\frac{g}{l} \sin y. \quad (3.6)$$

Le condizioni iniziali sono $y(0) = \alpha$, $y'(0) = 0$. Ponendo $y_1(x) = y(x)$ e $y_2(x) = y'(x)$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -g/l \sin y_1 \end{cases}$$

Esaminiamo ad esempio il caso $g/l = 1$ e $\alpha = 1$.

```
>> f=inline(' [y(2);-sin(y(1))] ','x','y');  
>> [x,u]=ode45(f,[0,20],[1,0]);  
>> plot(x,u(:,1),'k')
```

Si ottiene il grafico della figura 3.6. In questo modello quindi P continuerebbe ad

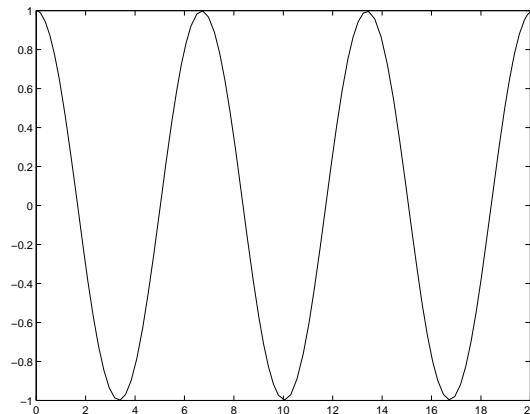


Figura 3.6: Moto del pendolo.

oscillare indefinitamente attorno al punto V . Se però si tiene conto che su P agisce, oltre alla forza di gravità, anche una forza smorzante dovuta alla presenza dell'aria, proporzionale alla velocità di P , il modello diventa

$$y'' = -\frac{kl}{m} y' - \frac{g}{l} \sin y, \quad \text{con } k > 0.$$

Si considera il caso $kl/m = 0.2$.

```

>> f=inline(' [y(2);-0.2*y(2)-sin(y(1))] ','x','y');
>> [x,u]=ode45(f,[0,20],[1,0]);
>> plot(x,u(:,1),'k')

```

In questo caso l'ampiezza delle oscillazioni si riduce nel tempo, come mostra la figura 3.7.

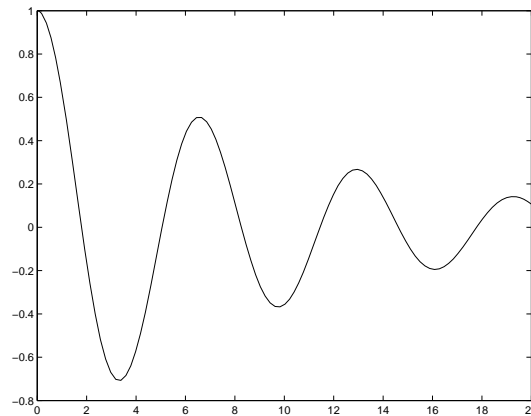


Figura 3.7: Moto smorzato del pendolo.

Problema

- Quando l'ampiezza delle oscillazioni si riduce a 0.01α , il pendolo sembra fermo. Dopo quanto tempo ciò avviene?
- Le figure 3.6 e 3.7 danno l'impressione che le oscillazioni del pendolo abbiano periodo costante nel tempo, ma questo non è corretto. È solo approssimativamente vero se le oscillazioni sono piccole. Se le oscillazioni sono grandi, il tempo necessario a completare un'oscillazione è una funzione di x legata agli integrali ellittici. Per vedere quale differenza c'è con il periodo costante, si sovrapponga al grafico della figura 3.6 il grafico della soluzione del problema (3.6) quando si approssima $\sin y$ con y (con questa approssimazione il periodo diventa costante).

3.2.3 Oscillatore armonico

Se si sposta un punto materiale P attaccato ad una molla dalla posizione di equilibrio, su P agisce la forza elastica della molla, che per la legge di Hooke è proporzionale all'allungamento della molla stessa. Si lascia poi andare P . Per la prima legge della dinamica la posizione $y(x)$ di P al tempo x soddisfa l'equazione

$$m y'' = -h y, \quad \text{con } h > 0.$$

Questo è il modello più semplice per descrivere un oscillatore armonico. Naturalmente modelli più complessi permettono di tenere conto anche di altre forze. Su P potrebbe per esempio agire una forza smorzante come l'attrito, proporzionale alla

velocità: in questo modo si terrebbe conto del fatto che P si muove in un mezzo viscoso. Oppure su P potrebbe agire una forza esterna $f(x)$, dipendente o meno dal tempo. Nella sua forma più completa il modello risulta allora

$$m y'' = -h y - k y' + f(x), \quad \text{con } h, k > 0. \quad (3.7)$$

Ponendo $y_1(x) = y(x)$ e $y_2(x) = y'(x)$, nel caso $m = 1$ si ottiene il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -h y_1 - k y_2 + f(x). \end{cases}$$

Esaminiamo alcuni casi interessanti. Se non vi sono né viscosità né forza esterna, P oscilla liberamente. Il suo moto è molto simile a quello della figura 3.6. Se vi è viscosità ma non forza esterna, le oscillazioni di P si smorzano tanto più rapidamente quanto maggiore è k . Il suo moto è molto simile a quello della figura 3.7. In entrambi i casi però il periodo è costante.

Vediamo invece che cosa succede quando vi è una forza esterna. Consideriamo il caso che $f(x)$ sia a sua volta una forza oscillante della forma

$$f(x) = \alpha \cos \omega x, \quad \text{con } \alpha, \omega > 0,$$

e che non vi sia attrito, cioè $k = 0$. Ad esempio, nel caso $h = 4$, $\alpha = 1$ e $\omega = 1.5$, il grafico di $y(x)$ ottenuto a partire dai valori iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è quello con linea continua della figura 3.8. Sovrapposto al grafico di $y(x)$ c'è il grafico, con linea tratteggiata, di $f(x)$.

```
>> f=inline(' [y(2);-4*y(1)+cos(1.5*x)] ', 'x', 'y');
>> [x,u]=ode45(f, [0,30], [0,1]);
>> plot(x,u(:,1), 'k')
>> hold on
>> ff=cos(1.5*x);
>> plot(x,ff, 'k--')
```

Se, mantenendo fissi gli altri parametri, facciamo crescere ω , si nota che l'ampiezza delle oscillazioni aumenta e diminuisce ciclicamente (questo fenomeno, ben noto in acustica, si verifica quando ω è vicino a \sqrt{h} ed è detto *battimento*). La figura 3.9 si riferisce al caso $\omega = 1.8$. Se facciamo crescere ancora ω , arriviamo al caso della *risonanza*, quando $\omega = \sqrt{h} = 2$. Il grafico è quello di figura 3.10. L'ampiezza delle oscillazioni cresce senza limite.

Se invece è presente anche l'attrito, fenomeni come il battimento o la risonanza non si possono verificare. Ad esempio, se $h = 0.1$, $k = 1$, $\alpha = 0.1$ e $\omega = 2$ il grafico è quello di figura 3.11.

Problemi

- Qual è la frequenza e l'ampiezza delle oscillazioni di $y(x)$ quando non vi è né attrito né forza esterna?

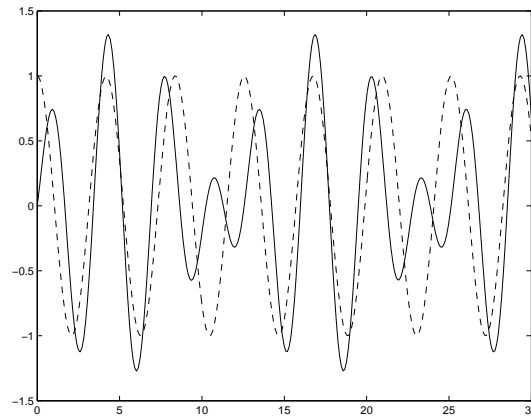


Figura 3.8: Moto di un oscillatore armonico.

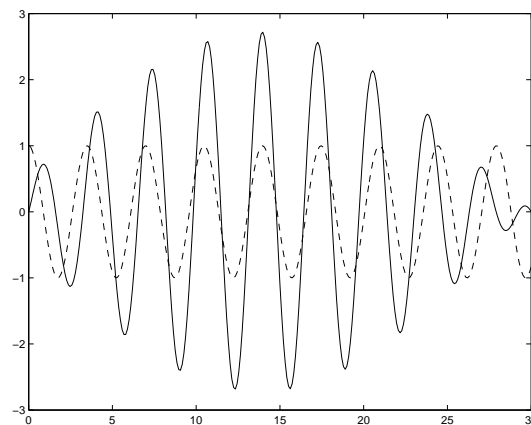


Figura 3.9: Fenomeno del battimento.

- Se vi è attrito ma non forza esterna, $y(x)$ può avere un comportamento oscillante oppure no. Questo diverso comportamento dipende dal fatto che l'equazione di secondo grado $q(z) = z^2 + kz + h = 0$ ha soluzioni reali oppure no. Mettere in relazione i due fatti. Anche quando è presente una forza esterna di tipo oscillante il comportamento di $y(x)$, se c'è attrito, dipende dalle soluzioni di $q(z) = 0$. Esaminare vari casi.

3.2.4 Pallina sul filo ruotante

Un anello metallico di raggio r è appeso in alto ad un gancio che lo fa ruotare attorno al suo asso verticale con velocità angolare costante ω . Una pallina di massa m è vincolata a scorrere lungo l'anello. Poiché si vuole anche tenere conto anche dell'attrito, sulla pallina agiscono tre forze: la forza gravitazionale, la forza centrifuga

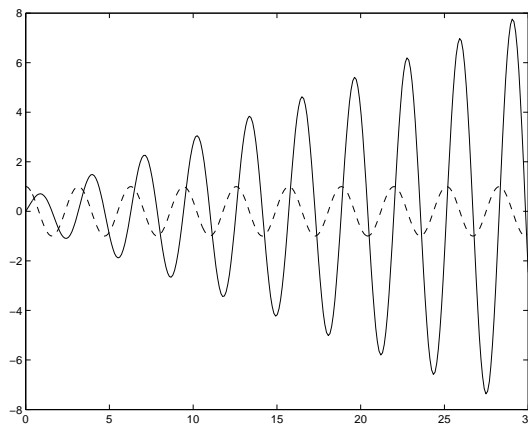


Figura 3.10: Fenomeno della risonanza.

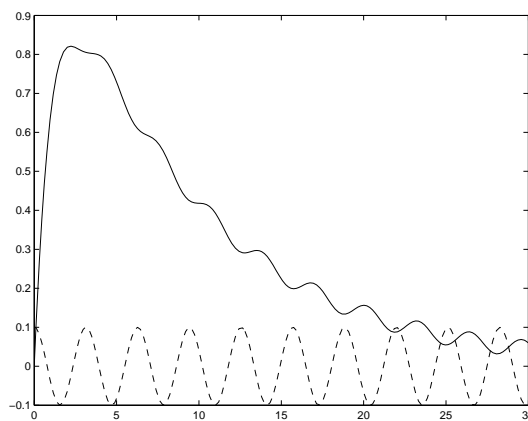


Figura 3.11: Oscillazioni smorzate.

e una forza viscosa proporzionale alla velocità della pallina stessa. Qual è la posizione di equilibrio della pallina?

Chiamato con $y(x)$ l'angolo fra la verticale e il raggio congiungente il centro dell'anello con la pallina, dalla prima legge della dinamica si ottiene l'equazione differenziale

$$mry'' = -ky' - mg \sin y + mr\omega^2 \sin y \cos y, \quad \text{con } k > 0.$$

Posto $m = 1$ e $r = 1$, l'equazione si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -ky_2 - g \sin y_1 + \omega^2 \sin y_1 \cos y_1 \end{cases}$$

Si suppone che inizialmente l'angolo della pallina sia $\pi/2$, quindi $y_1(0) = \pi/2$ e $y_2(0) = 0$. La pallina scorre lungo l'anello e se ω è piccolo, oscilla intorno al punto

più basso dell'anello con oscillazioni sempre più strette. Però se ω è abbastanza grande, la posizione di equilibrio della pallina è un punto intermedio dell'anello. Consideriamo ad esempio il caso $\omega^2 = 30$ e $k = 1$.

```
>> f=inline(' [y(2);-y(2)-9.8*sin(y(1))+30*sin(y(1))*cos(y(1))] '...
            , 'x', 'y');
>> [x,u]=ode45(f, [0,10], [pi/2,0]);
>> plot(x,u(:,1), 'k')
```

L'angolo della pallina percorre la curva della figura 3.12

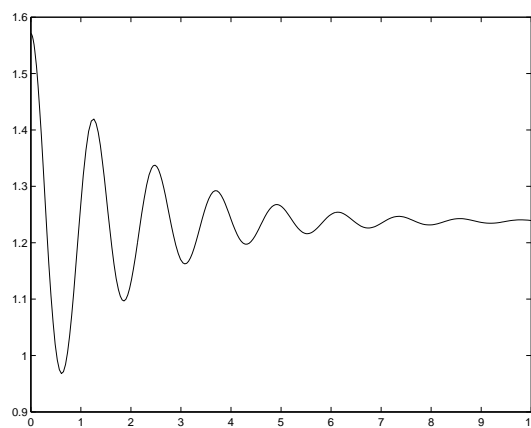


Figura 3.12: Posizione di equilibrio della pallina.

Problemi

- Quanto deve essere grande ω affinché la posizione di equilibrio della pallina non sia quella in basso? È possibile che la pallina attraversi il punto basso dell'anello e trovi una posizione di equilibrio dalla parte opposta a quella in cui viene lasciata inizialmente? È possibile che la pallina attraversi più volte il punto basso? È possibile che il punto di equilibrio si trovi più in alto del punto iniziale?

3.2.5 Moto di un punto soggetto ad una forza centrale

Sia P un punto materiale di massa m del piano $O(y_1, y_2)$, individuato dal vettore $\mathbf{p} = (y_1, y_2)$. Si suppone che su P agisca una forza di tipo centrale, cioè

$$\mathbf{f} = -\frac{\alpha}{r^k} \mathbf{p}, \quad \text{dove } r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \quad \text{e } \alpha, k > 0 \quad \text{costanti.}$$

Se $k = 3$, \mathbf{f} è una forza di tipo gravitazionale: infatti $\|\mathbf{f}\|_2 = -\alpha/r^2$ è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza del punto P dall'origine O .

Ci si propone di studiare il moto di P , cioè le funzioni $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ al tempo $x \geq 0$, sapendo che all'istante iniziale $x = 0$ il punto P si trova in $(1, 0)$ ed

è dotato di una velocità iniziale $(0, 1)$. Dalla prima legge della dinamica si ottiene il sistema differenziale

$$\begin{cases} m y_1'' = -\frac{\alpha}{r^k} y_1 \\ m y_2'' = -\frac{\alpha}{r^k} y_2 \end{cases}$$

con le condizioni iniziali

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad \left. \frac{dy_1}{dx} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dy_2}{dx} \right|_{t=0} = 1.$$

Questo sistema può essere trasformato in un sistema di quattro equazioni differenziali del primo ordine, ponendo

$$y_3 = y_1', \quad y_4 = y_2'.$$

Ad esempio, nel caso di una forza di tipo gravitazionale con $\alpha = 3$ e $m = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = -\frac{3}{r^3} y_1 \\ y_4' = -\frac{3}{r^3} y_2 \end{cases}$$

con le condizioni iniziali

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0, \quad y_4(0) = 1.$$

Si costruisce a parte il vettore di funzioni \mathbf{f} .

```
function f=f(x,y)
f=[ y(3)
    y(4)
    -3*y(1)/(y(1)^2+y(2)^2)^1.5
    -3*y(2)/(y(1)^2+y(2)^2)^1.5 ]

>> [x,u]=ode45(f,[0,1.68],[1,0,0,1]);
>> plot(u(:,1),u(:,2),'k')
>> axis([-0.4 1.2 -0.65 0.65])
```

Nella figura 3.13 è riportata nel piano (y_1, y_2) la traiettoria ottenuta, cioè il grafico della funzione $[y_1(x), y_2(x)]$.

È interessante studiare le traiettorie che si ottengono con forze centrali dipendenti da potenze diverse di r .

Ad esempio per $k = 2$ e $\alpha = 3$ si ottiene la figura 3.14, per $k = 3.1$ si ottiene la figura 3.15, per $k = 4$ e $\alpha = 1.05$ si ottiene la figura 3.16.

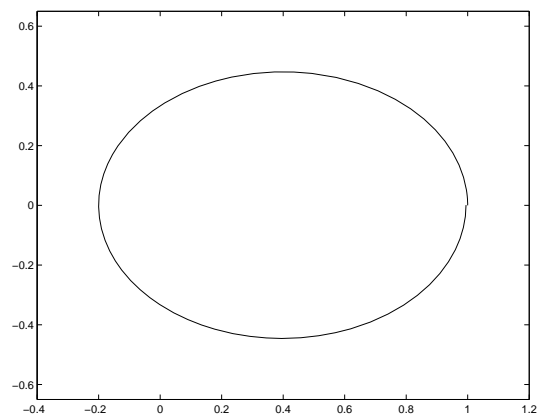


Figura 3.13: Traiettoria nel caso di una forza gravitazionale.

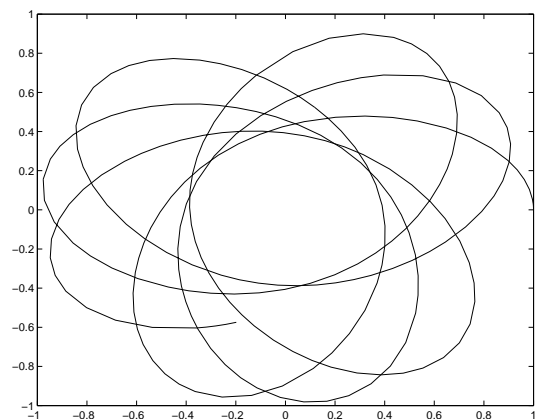


Figura 3.14: Traiettoria nel caso $k = 2$.

3.2.6 Oscillatori accoppiati

Su una retta sono disposti 4 punti O , P_1 , P_2 e O' , collegati da 3 molle uguali di costante elastica h e lunghezza l ciascuna. I due punti estremi sono fissi, mentre i due punti intermedi P_1 e P_2 , di massa $m = 1$, sono liberi di muoversi lungo la retta. Il sistema a riposo ha pertanto lunghezza $3l$. Si vuole studiare il moto di P_1 e P_2 quando il solo primo punto viene spostato dalla posizione di equilibrio, supponendo che non vi sia attrito.

Indicate con $y_1(x)$ e $y_2(x)$ le distanze di P_1 e P_2 da O al tempo x , dalla prima legge della dinamica si ha

$$\begin{cases} y_1'' = -h y_1 + h (y_2 - y_1) \\ y_2'' = -h (y_2 - y_1) + h (3l - y_2). \end{cases}$$

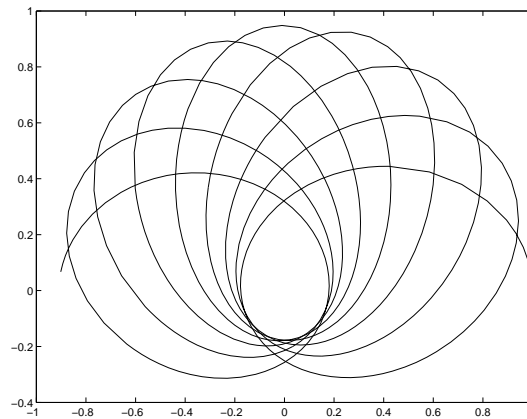


Figura 3.15: Traiettoria nel caso $k = 3.1$.

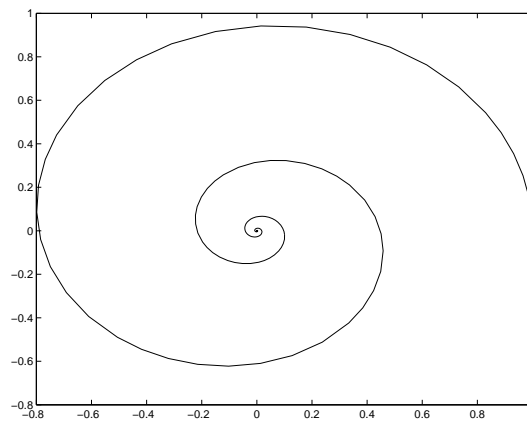


Figura 3.16: Traiettoria nel caso $k = 4$.

Posto $y'_1 = y_3$ e $y'_2 = y_4$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y'_1 = y_3 \\ y'_2 = y_4 \\ y'_3 = h(y_2 - 2y_1) \\ y'_4 = h(3l - 2y_2 + y_1). \end{cases}$$

Consideriamo il caso $l = 1$, $h = 0.1$, con le condizioni iniziali $y_1(0) = l/2$, $y_2(0) = 2l$, $y_3(0) = y_4(0) = 0$.

```
>> f=inline(' [y(3);y(4);0.1*(y(2)-2*y(1));0.1*(3-2*y(2)+y(1))]','x','y');
>> [x,u]=ode45(f,[0,50],[0.5,2,0,0]);
```

```
>> plot(x,u(:,1),'k',x,u(:,2),'k')
```

La figura 3.17 riporta i grafici di $p_1(x)$ (sotto) e $p_2(x)$ (sopra) nel caso

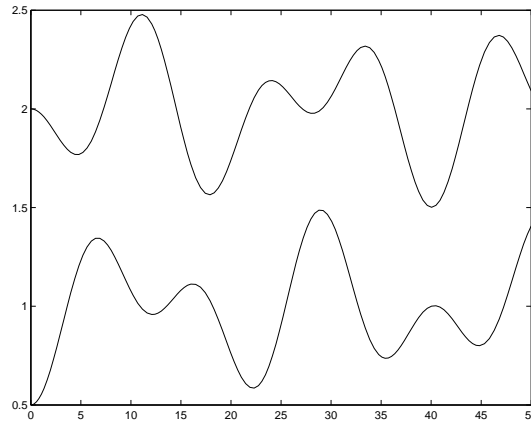


Figura 3.17: Oscillatori accoppiati.

Problema

- Studiare il problema degli oscillatori accoppiati quando vi è attrito nel moto di P_1 e P_2 .

3.2.7 Una catena di palline

Sono date N palline P_i , $i = 1, \dots, N$, ciascuna collegata alla successiva da una molla. Tutte le molle hanno la stessa lunghezza l e la stessa costante elastica h . Inoltre la prima e l'ultima pallina sono sospese, sempre mediante le stesse molle, a due punti fissi O e O' , collocati alla stessa quota. Chiaramente la catena di palline si dispone in un piano verticale. Che configurazione assume questo sistema? Come si muovono le palline se una sola di esse viene spostata dalla configurazione di equilibrio?

Fissiamo nel piano delle palline un riferimento di origine O , con il primo asse passante per O' e unità di misura uguale a l . Indichiamo con $\mathbf{y}_i(x) = (y_{i,1}(x), y_{i,2}(x))$ la posizione della i -esima pallina al tempo x . Su di essa agiscono la forza elastica della $(i-1)$ -esima molla, data da $h(\mathbf{y}_{i-1} - \mathbf{y}_i)$, della i -esima molla, data da $h(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i)$, e della forza di gravità, data da $\mathbf{g} = (0, g)$. Per la prima legge della dinamica si ha

$$m \mathbf{y}_i'' = h(\mathbf{y}_{i-1} - 2\mathbf{y}_i + \mathbf{y}_{i+1}) - m\mathbf{g}, \quad \text{per } i = 1, \dots, N,$$

$$\text{e } \mathbf{y}_0(x) = (0, 0), \quad \mathbf{y}_{N+1}(x) = ((N+1)l, 0) \quad \text{per ogni } x.$$

Si ottengono quindi due sistemi differenziali di N equazioni ciascuno.

$$\begin{aligned} y_{i,1}'' &= \frac{h}{m} (y_{i-1,1} - 2y_{i,1} + y_{i+1,1}), & i = 1, \dots, N, \\ y_{i,2}'' &= \frac{h}{m} (y_{i-1,2} - 2y_{i,2} + y_{i+1,2}) - g, & i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nella configurazione di equilibrio è $\mathbf{y}'' = 0$, per cui le prime componenti verificano il sistema

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \text{dove } \mathbf{b} = (0, \dots, 0, -(N+1)l)$$

e A è la matrice tridiagonale avente -2 sulla diagonale principale e 1 sulle subdiagonali. Le seconde componenti verificano il sistema

$$A\mathbf{v} = \mathbf{c}, \quad \text{dove } \mathbf{c} = mg/h(1, \dots, 1).$$

È facile verificare che il primo sistema ha soluzione $u_i = il$, $i = 1, \dots, N$ e che il secondo sistema ha soluzione

$$v_i = -\frac{i(N+1-i)}{2} \frac{mg}{h}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Risulta quindi

$$\mathbf{y}_i = \left(il, -\frac{i(N+1-i)mg}{2h} \right), \quad i = 1, \dots, N,$$

cioè nella configurazione di equilibrio le palline stanno su una parabola con il vertice in basso e l'asse nel punto di mezzo del segmento $[O, O']$.

Supponiamo adesso di spostare una pallina. Ad esempio, tenendo ferme le altre palline, si sposta la prima pallina verso il basso, portandola alla stessa quota della seconda e si lascia andare. Vediamo cosa succede nel caso $N = 3$ e $h/m = 1$. Poiché la condizione iniziale agisce solo sulla seconda componente dei vettori \mathbf{y}_i , le prime componenti non vengono modificate rispetto a quelle della situazione di equilibrio. Possiamo perciò limitare lo studio al solo secondo sistema (3.8). Posto $y_i(x) = y_{i,2}(x)$, si ha

$$\begin{cases} y_1'' = -2y_1 + y_2 - g \\ y_2'' = y_1 - 2y_2 + y_3 - g \\ y_3'' = y_2 - 2y_3 - g, \end{cases}$$

che con la posizione $y_1' = y_4$, $y_2' = y_5$, $y_3' = y_6$ si trasforma in un sistema di 6 equazioni differenziali del primo ordine. Si assume come condizione iniziale $y_1(0) = y_2(0) = -2g$, $y_3(0) = -3g/2$, $y_4(0) = y_5(0) = y_6(0) = 0$.

```
function f=f(x,y)
g=9.8;
f=[ y(4); y(5); y(6)
    -2*y(1)+y(2)-g
    y(1)-2*y(2)+y(3)-g
    y(2)-2*y(3)-g ];

>> g=9.8;
>> [x,u]=ode45('f',[0,10],[-2*g,-2*g,-3*g/2,0,0,0]);
>> plot(x,u(:,1),'k',x,u(:,2),'k--',x,u(:,3),'k:')
```

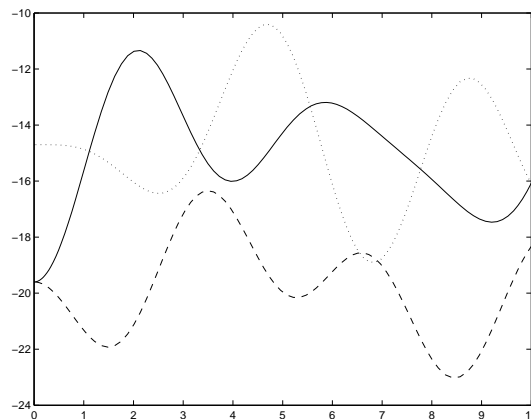


Figura 3.18: Oscillazioni di una catena di palline.

I grafici delle tre funzioni $y_1(x)$ (con linea continua), $y_2(x)$ (con linea tratteggiata), $y_3(x)$ (con i puntini) sono riportati nella figura 3.18.

Problemi

- Per spostare una sola pallina dalla posizione di equilibrio bisogna tenere ferme le altre. Se invece si sposta una pallina senza tenere ferme le altre, anche le altre si spostano, e si ottiene una nuova configurazione di equilibrio. Perciò quando la pallina viene rilasciata, è questa nuova posizione di equilibrio che costituisce la condizione iniziale per la risoluzione del sistema differenziale. Studiare il problema.
- Si supponga che le palline siano immerse in un mezzo viscoso, ad esempio l'aria. Come varia il modello? Si verifichi che prima o poi il sistema riguadagna (quasi) la posizione di equilibrio.

3.2.8 L'attrattore di Lorentz

Nello studio dei sistemi caotici rivestono un ruolo di primo piano i modelli che descrivono le traiettorie dei punti di un fluido sotto determinate sollecitazioni (calore, differenze di pressione, ecc.) come ad esempio nei vortici che si formano per i moti convettivi nell'atmosfera. Queste traiettorie si dispongono in insiemi complicati, detti attrattori. Il più studiato è l'attrattore di Lorentz, descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} y_1' = \sigma(y_2 - y_1) \\ y_2' = r y_1 - y_2 - y_1 y_3 \\ y_3' = y_1 y_2 - b y_3, \end{cases}$$

dove σ , r e b sono dei parametri. Studiamo ad esempio il caso $\sigma = 10$, $r = 48$ e $b = 8/3$ a partire dalle condizioni iniziali $y_1(0) = y_3(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.

```

function f=f(x,y)
f=[ 10*(y(2)-y(1))
    48*y(1)-y(2)-y(1)*y(3)
    y(1)*y(2)-8/3*y(3) ];

>> [x,u]=ode45('f',[0,10],[0,1,0]);
>> plot(x,u(:,2),'k')

```

Il grafico di $y_2(x)$ è quello riportato nella figura 3.19. È evidente che si tratta di

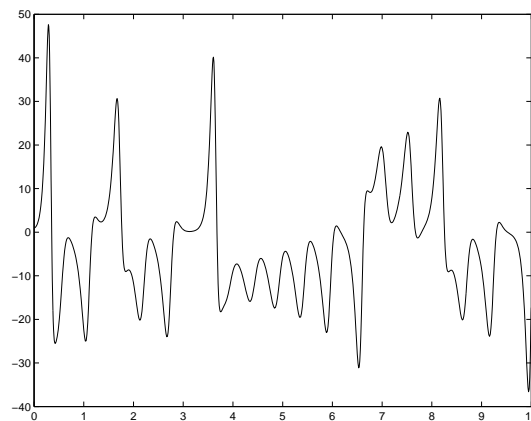


Figura 3.19: Grafico di $y_2(x)$ per l'attrattore di Lorenz.

un comportamento caotico. La parte più interessante però si rivela lo studio della traiettoria. La figura 3.20 mostra la proiezione della traiettoria nel piano (y_1, y_3) .

```

>> plot(u(:,1),u(:,3),'k')

```

Sembra che la traiettoria si incroci più volte, ma in realtà questo non accade (la traiettoria è tridimensionale e quella che si vede ne è solo la proiezione su un piano).

Problema

- Un altro attrattore famoso è quello di Rössler, descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 - y_3 \\ y_2' = y_1 + \alpha y_2 \\ y_3' = \beta + y_3(y_1 - \gamma). \end{cases}$$

Disegnare le traiettorie per diversi insiemi di parametri e diverse condizioni iniziali. Ad esempio, per $\alpha = \beta = 0.2$ e $\gamma = 2.5$ con $\mathbf{y} = (1, 1, 1)$.

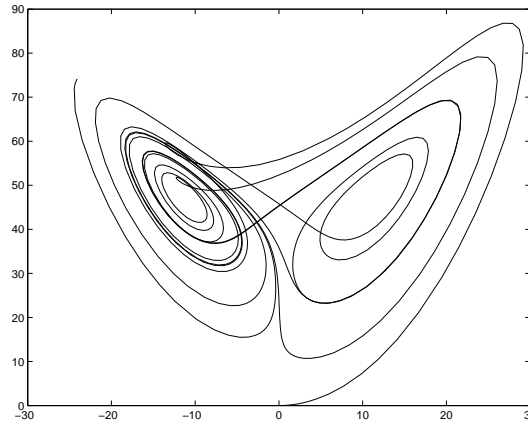


Figura 3.20: Proiezione sul piano (y_1, y_3) della traiettoria dell'attrattore di Lorenz.

3.2.9 Il problema dell'inseguimento

Ci sono una preda e un predatore. La preda, ignara di essere osservata da un predatore, segue un suo cammino predefinito, dipendente dal tempo $x \geq 0$. Il predatore si muove in modo che ad ogni istante la tangente al suo cammino punti verso la preda, con una velocità uguale a k volte la velocità della preda.

Indichiamo con $r(x) = (r_1(x), r_2(x))$ il cammino della preda e con $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$ il cammino del predatore. Quindi ad ogni istante x la velocità della preda è $v = \sqrt{r_1'^2 + r_2'^2}$ e la velocità del predatore è $w = \sqrt{y_1'^2 + y_2'^2}$. Poiché il predatore si muove verso la preda, si può porre

$$\begin{cases} y_1' = s(x) (r_1 - y_1) \\ y_2' = s(x) (r_2 - y_2), \end{cases}$$

dove $s(x)$ dipende dal rapporto delle velocità. Imponendo che $w = kv$, si ha

$$s(x) = \frac{k \sqrt{r_1'^2 + r_2'^2}}{\sqrt{(r_1 - y_1)^2 + (r_2 - y_2)^2}}.$$

Si vuol sapere se il predatore riesce a catturare la preda e dopo quanto tempo. Naturalmente questo dipende dal rapporto k delle velocità e dalla posizione iniziale del predatore. Esaminiamo vari casi in cui il rapporto delle velocità è $k = 0.75$. Se la preda segue un cammino rettilineo, ad esempio $r(x) = (x, x)$, e il predatore è inizialmente nel punto $(3, 0)$, si ottiene la traiettoria $y(x)$ riportata nella figura 3.21 con i pallini. La traiettoria $r(x)$ della preda è riportata con asterischi.

```
function f=f(x,y)
k=0.75;
```

```

r=[x;x];
rr=[1;1];
s=k*norm(rr)/norm(r-[y(1);y(2)]);
f=[ s*(r(1)-y(1))
    s*(r(2)-y(2)) ];

>> [x,u]=ode45('f',[0,3.8],[3,0]);
>> plot(u(:,1),u(:,2),'ko',x,x,'k*')

```

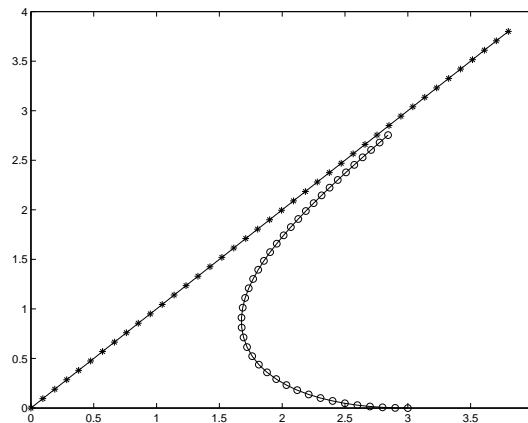


Figura 3.21: Traiettoria nel caso che la preda si muova su un cammino rettilineo.

Se la preda segue un cammino circolare, ad esempio $r(x) = (\cos x, \sin x)$, e il predatore è inizialmente nel punto $(3, 0)$, si ottiene la traiettoria $y(x)$ riportata nella figura 3.22.

```

function f=f(x,y)
k=0.75;
r=[cos(x);sin(x)];
rr=[-sin(x);cos(x)];
s=k*norm(rr)/norm(r-[y(1);y(2)]);
f=[ s*(r(1)-y(1))
    s*(r(2)-y(2)) ];

>> [x,u]=ode45('f',[0,10],[3,0]);
>> plot(u(:,1),u(:,2),'ko',cos(x),sin(x),'k*-')

```

Se la preda segue un cammino a spirale della forma

$$r_1(x) = \sqrt{1+x} \cos x, \quad r_2(x) = \sqrt{1+x} \sin x,$$

e il predatore è inizialmente nel punto $(3, 0)$, si ottiene la traiettoria $y(x)$ riportata nella figura 3.23.

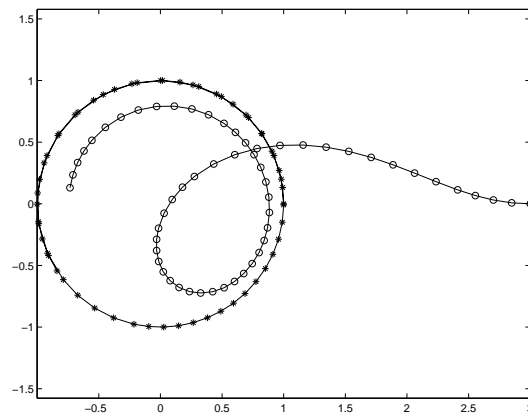


Figura 3.22: Traiettoria nel caso che la preda si muova su un cammino circolare.

```
function f=f(x,y)
k=0.75;
r=[sqrt(1+x)*cos(x);sqrt(1+x)*sin(x)];
rr=[cos(x)/(2*sqrt(1+x))-sqrt(1+x)*sin(x)
    sin(x)/(2*sqrt(1+x))+sqrt(1+x)*cos(x)];
s=k*norm(rr)/norm(r-[y(1);y(2)]);
f=[ s*(r(1)-y(1))
    s*(r(2)-y(2)) ];

>> [x,u]=ode45('f',[0,10],[3,0]);
>> plot(u(:,1),u(:,2),'ko',sqrt(1+x).*cos(x),sqrt(1+x).*sin(x),'k*-')
```

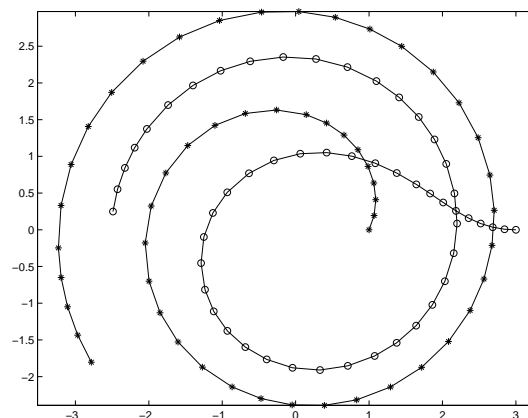


Figura 3.23: Traiettoria nel caso che la preda si muova su una spirale.

In nessuno dei casi esaminati la preda viene catturata, perché il rapporto delle

velocità è troppo basso.

Problema

- Per quali valori di k e quali posizioni iniziali della preda il predatore riesce a catturare la preda nei vari casi?

3.3 Modelli geometrici

Spesso una curva piana è definita in modo implicito per mezzo di un sistema differenziale che ne descrive le proprietà. Perciò, a parte alcuni casi particolarmente semplici, se vogliamo disegnarne il grafico, dobbiamo prima risolvere il sistema differenziale. Vediamone alcuni esempi significativi.

3.3.1 Polinomi di Hermite

I polinomi ortogonali sono soluzioni di particolari equazioni differenziali del secondo ordine. Ad esempio i polinomi di Hermite soddisfano l'equazione

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

dove n è un intero. L' n -esimo polinomio di Hermite viene indicato con $H_n(x)$. Per disegnarlo occorrono naturalmente due condizioni iniziali. Per n pari è noto che

$$H_n(0) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1) \quad \text{e} \quad H'_n(0) = 0.$$

$H_n(x)$ si annulla in n punti distinti e il suo grafico ha oscillazioni tanto più ampie quanto maggiore è n . Perciò se vogliamo sovrapporre in uno stesso disegno i grafici di più polinomi, dobbiamo usare un fattore di scala. Di solito si usa il fattore 2^{2n} . Perciò per $n = 4$ il polinomio $2^{-8}H_4(x)$ viene calcolato risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = 2xy_2 - 8y_1 \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $y_1(0) = 105/2^8$ e $y_2(0) = 0$. La figura 3.24 riporta i grafici di $2^{-8}H_4(x)$ (linea continua) e di $2^{-12}H_6(x)$ (linea tratteggiata).

```
>> f=inline(' [y(2);2*x*(y(2)-8*y(1))] ','x','y');
>> [x,u]=ode45(f,[0,2],[105/2^8,0]);
>> plot(x,u(:,1),'k-')
>> hold on
>> f=inline(' [y(2);2*x*(y(2)-12*y(1))] ','x','y');
>> [x,u]=ode45(f,[0,2],[10395/2^12,0]);
>> plot(x,u(:,1),'k--')
```

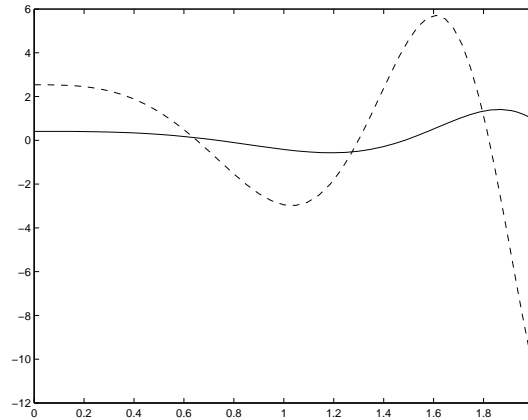


Figura 3.24: Polinomi di Hermite.

3.3.2 Curva avente un'assegnata curvatura

Sia $\Gamma = (x(s), y(s))$ una curva espressa mediante l'ascissa curvilinea $s \in [0, L]$. Sia $P = P(s)$ un punto di Γ . Detto $\phi(s)$ l'angolo fra la tangente T a Γ in P e l'asse x , i coseni direttori di T sono

$$\cos \phi(s) = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \phi(s) = \frac{dy}{ds}.$$

La curvatura in P è definita come

$$c(s) = \frac{d\phi}{ds}.$$

(si può dimostrare che $c(s)$ è uguale al reciproco del raggio del cerchio osculatore a Γ in P). È evidente che se $c(s) = 0$ per ogni s , Γ è una retta, e che se $c(s)$ è costante, Γ è una circonferenza. Assai più complicato è studiare Γ quando $c(s)$ è una funzione non costante. Il sistema che definisce Γ e che va risolto è

$$\begin{cases} x' = \cos \phi \\ y' = \sin \phi \\ \phi' = c(s). \end{cases}$$

Assumiamo che inizialmente sia $x(0) = y(0) = \phi(0) = 0$. Ad esempio, se $c(s) = s$, il grafico di Γ è quello della figura 3.25. L'ultimo parametro, aggiunto nella chiamata della funzione di Matlab `ode45`, serve a specificare una maggiore precisione del risultato fornito. In questo modo si riesce ad ottenere un grafico sufficientemente fluido.

```
>> f=inline(' [cos(y(3));sin(y(3));s]', 's', 'y');
>> [x,u]=ode45(f, [0,5], [0,0,0],odeset('reltol',1e-5));
>> plot(u(:,1),u(:,2),'k-')
```

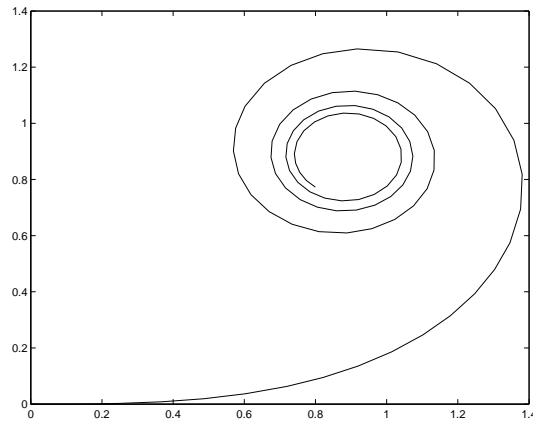


Figura 3.25: Curva avente curvatura $c(s) = s$.

Per $c(s) = \sin s$, il grafico di Γ è quello della figura 3.26 e per $c(s) = s \sin s$, il grafico di Γ è quello della figura 3.27.

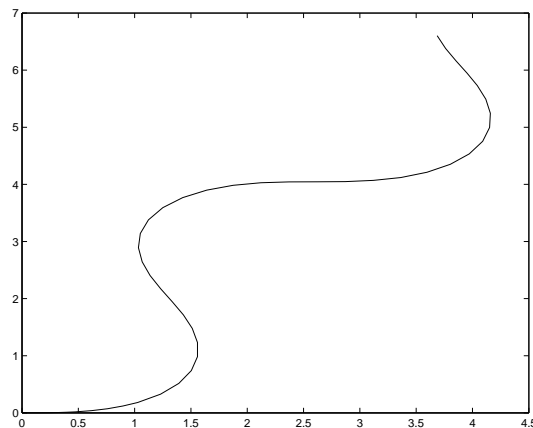


Figura 3.26: Curva avente curvatura $c(s) = \sin s$.

3.3.3 La catenaria

Una corda C di densità uniforme u è appesa alle due estremità a due punti fissi O_1 e O_2 (non necessariamente alla stessa quota). Vogliamo disegnare la forma $y(x)$ assunta dalla corda nel piano verticale contenente O_1 e O_2 . Indichiamo con $P = P(x, y)$ il generico punto di C , con t_P la tangente a C in P e con θ l'angolo di t_P con l'asse x . Quindi $\tan \theta = y'(x)$. Su P agisce la forza f di tensione, diretta come t_P , che si può scomporre nella componente orizzontale $f_x = f \cos \theta$ e nella componente verticale $f_y = f \sin \theta$. Poiché la corda è in equilibrio, f_x è costante,

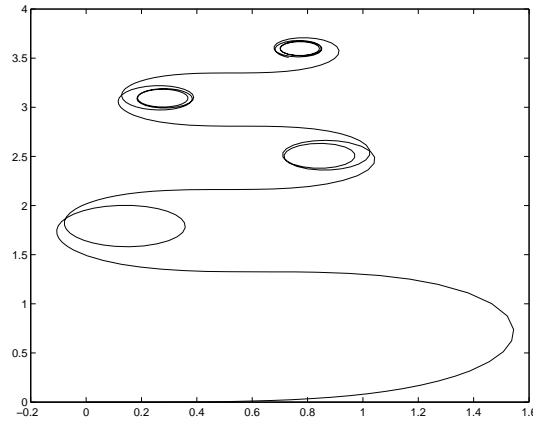


Figura 3.27: Curva avente curvatura $c(s) = s \sin s$.

mentre f_y controbilancia la forza di gravità che agisce sulla parte di corda compresa fra O_1 e P e che è proporzionale alla lunghezza $s(x)$ della corda da O_1 a P . Si ha quindi

$$f \cos \theta = \text{cost.} \quad \text{e} \quad f \sin \theta = u s(x).$$

Poiché

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2} dt,$$

è

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'(x)^2},$$

perciò

$$\tan \theta = y'(x) = c s, \quad \text{con } c \text{ costante,}$$

da cui si ottiene per derivazione l'equazione

$$y'' = c \sqrt{1 + y'(x)^2}.$$

Sia ad esempio $c = 5$, $O_1 = (0, 2)$ e $O_2 = (1, 1)$. Quindi la $y(x)$ cercata deve soddisfare le condizioni

$$y(0) = 2, \quad y(1) = 1.$$

Per trovare $y(x)$ usiamo il metodo di shooting. Poiché vicino ad O_1 la corda tende verso il basso, si assume $\theta_0 = -1$ e si risolve con il metodo di Runge-Kutta il sistema

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = c \sqrt{1 + y_2^2}, \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = \theta_0$.

```
>> t0=-1; [x,u]=ode45(f,[0,1],[2,t0]);
>> i=length(x); ft0=u(i,1)
ft0 =
    7.8663
```

Il valore $ft0$ ottenuto in 2 è maggiore di 1. Si ripete il calcolo assumendo $\theta_1 = -10$.

```
>> t1=-10; [x,u]=ode45(fun,[1,2],[1,t1]);
>> i=length(x); ft1=u(i,1)
ft1 =
    0.7437
```

Adesso $ft1$ è minore di 1. Si prosegue con la (2.12), come si è già fatto nell'esempio 2.16. Si ottengono i valori $ft2 = 0.8323$ e $ft3 = 1.0047$, che è sufficientemente vicino a 1. Il grafico corrispondente è riportato nella figura 3.28. La funzione così ottenuta prende il nome di *catenaria*.

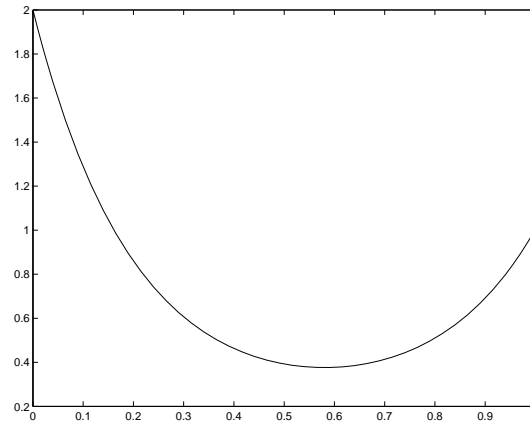


Figura 3.28: La catenaria.

Problema

- Che relazione c'è fra la costante c e la lunghezza della corda? Disegnare $y(x)$ per diversi valori di c , ad esempio $c = 2$ e $c = 10$. Qual è il minimo valore c_{\min} per cui il problema ha soluzione? Che succede se è $c < c_{\min}$?

3.3.4 La goccia d'acqua

Che forma assume una goccia d'acqua caduta su un piano orizzontale? Chiaramente ogni sezione orizzontale della goccia è un cerchio. Interessa invece disegnare la curva $y(x)$ individuata dalla superficie superiore in un qualunque piano verticale passante per il centro del cerchio di base. Tenendo conto della tensione superficiale, il modello che descrive $y(x)$ risulta essere

$$y'' = -(1 - y)(1 + y'^2)^{3/2}.$$

Indicando con 1 il raggio del cerchio di base, $y(x)$ deve soddisfare le condizioni

$$y(-1) = y(1) = 0.$$

Per trovare $y(x)$ usiamo il metodo di shooting. Si assume $\theta_0 = 1$ e si risolve con il metodo di Runge-Kutta il sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -(1 - y_1)(1 + y_2^2)^{3/2}, \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $y_1(-1) = 0$, $y_2(-1) = \theta_0$. Si ottiene $F(\theta_0) = y_1(1) = -0.1420$. Poiché questo valore è negativo, si ripete il calcolo assumendo $\theta_1 = 1.5$. Si ottiene $F(\theta_1) = y_1(1) = 0.6456$. Si prosegue poi con la (2.12) e dopo due iterazioni si ottiene la funzione illustrata nella figura 3.29.

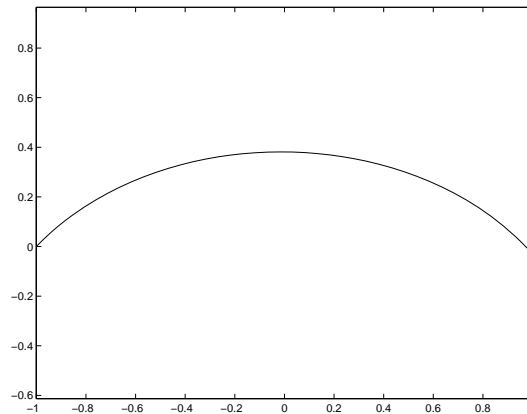


Figura 3.29: Sezione verticale di una goccia d'acqua.