CALCOLO DI DERIVATE

La derivata di un prodotto fg di due funzioni derivabili:

$[(fg)(x+h)-(fg)(x)]/h = [f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)]/h =$

$[f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)-f(x)g(x)]/h=$

$[(f(x+h)-f(x))/h]g(x+h) + [(g(x+h)-g(x))/h]f(x)$

Passando al limite per $h \to 0$, si ha

$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

CALCOLO DI DERIVATE

Supponiamo che $f:I\rightarrow R$ sia una funzione derivabile in un punto x con $f(x)\neq 0$ allora 1/f è derivabile in x e si ha

$$\mathbf{(1/f)' = -f' / f^2}$$

Dimostriamolo:

$[1/f(x+h) - 1/f(x)]/h = (f(x) - f(x+h))/(f(x+h)f(x)h)=$

$-[(f(x+h)-f(x))/h]\cdot 1/(f(x+h)f(x)$

da cui, passando al limite per $h\rightarrow 0$, si ottiene il risultato annunciato

Esempio: deriviamo $1/x^3$, si ha

$(1/x^3)' =-3x^2/x^6 =-3x^{-4}$

CALCOLO DI DERIVATE

Più in generale deriviamo $1/x^n$, si ha

$(1/x^n)' = -nx^{n-1}/x^{2n} = -nx^{-n-1}$

Si osserva che poiché $1/x^n = x^{-n}$, e si è ottenuto

$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$

la regola di derivazione per le potenze ad esponente naturale si estende anche alle potenze intere

CALCOLO DI DERIVATE

Supponiamo che f e g siano funzioni derivabili in un punto x con $g(x)\neq 0$ allora f/g è derivabile in x e si ha
$\mathbf{(f/g)' = (f'g-fg')/g^2}$

Infatti, per la regola del prodotto, si ha
$(f/g)' = (f\cdot 1/g)' = f'\cdot(1/g) + f\cdot(1/g)' = f'\cdot(1/g) + f\cdot(-g'/g^2) = = (f'g-fg')/g^2$

CALCOLO DI DERIVATE

Esempio: deriviamo la seguente funzione razionale
$(x^2-3x+6)/(3x+2)$ per $x \neq -2/3$

$((x^2-3x+6)' \cdot (3x+2) - (x^2-3x+6)(3x+2)')/(3x+2)^2 =$
$((2x-3) \cdot (3x+2) - 3(x^2-3x+6))/(3x+2)^2 =$
$(6x^2 -5x -6 -3x^2 +9x -18)/(9x^2+12x+4)=$
$(3x^2 +4x-24)/(9x^2+12x+4)$

CALCOLO DI DERIVATE

Vogliamo determinare la **derivata di una funzione composta $g_o f$**, supponendo f derivabile in x e g derivabile in f(x), e la composizione $g_o f$ definita vicino ad x, si ha

$(g_o f(x+h)- g_o f(x))/h = [g(f(x+h)) -g(f(x))]/h=$

$[g(f(x)+f(x+h)-f(x))-g(f(x))]/(f(x+h)-f(x))\cdot (f(x+h)-f(x))/h=$

$[g(y+h_1)-g(y)]/h_1\ (f(x+h)-f(x))/h$

dove si è posto $y=f(x)$ ed $h_1=f(x+h)-f(x)$. Poiché f, essendo derivabile, è anche continua, quando h tende a 0 anche h_1 tende a 0, e quindi passando al limite, otteniamo

$\mathbf{(g_o f)'(x)=g'(f(x))f'(x)}$

CALCOLO DI DERIVATE

Sia f una funzione invertibile, derivabile in un punto x, tale che $f(x)=y$, con $f'(x)\neq 0$, allora la **funzione inversa f^{-1}** è derivabile nel punto $y=f(x)$ e vale

$$(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$$

Infatti, dal rapporto incrementale

$[f^{-1}(y+h)- f^{-1}(y)]/h= [f^{-1}(y+h)- x]/(y+h-y) =$

$(x_1 -x)/[f(x_1)-f(x)] = h_1/[f(x+h_1)-f(x)]$

dove si è posto $x_1 = f^{-1}(y+h)$ ed $h_1 = x_1 -x$

Poiché f^{-1} è continua in y, per $h\rightarrow 0$ anche $h_1\rightarrow 0$, quindi si ottiene la regola enunciata

CALCOLO DI DERIVATE

Siamo in grado ora di calcolare la derivata della funzione potenza con esponente razionale $x^{p/q}$. Tale funzione può essere vista come funzione composta $g_o f(x)$, dove

$f(x)= x^{1/q}$ e g è la funzione potenza di esponente p, quindi, utilizzando la relazione vista per la derivata di una funzione composta, abbiamo

$(x^{p/q})' =((x^{1/q})^p)' =p\,(x^{1/q})^{p-1}(x^{1/q})'$

Dobbiamo calcolare la derivata di $x^{1/q}$ che possiamo vedere come funzione inversa della funzione potenza con esponente q, si ottiene

$(x^{1/q})' =1/[q\,(x^{1/q})^{q-1}]=(1/q)\cdot(x^{(1-q)/q})$

CALCOLO DI DERIVATE

Ed infine

$(x^{p/q})' = ((x^{1/q})^p)' = p\,(x^{1/q})^{p-1}(x^{1/q})' =$

$p\,(x^{1/q})^{p-1}\cdot(1/q)\cdot(x^{(1-q)/q}) =$

$(p/q)\,x^{(p/q)-1}$

Possiamo quindi concludere che, anche per le potenze con esponente razionale, vale la stessa regola di derivazione delle potenze con esponente naturale.

CALCOLO DI DERIVATE

Calcoliamo la derivata della funzione logaritmo in base naturale , si ha

$[\log(x+h) - \log x]/h = (\log[(x+h)/x])/h = \log(1+h/x)^{1/h}$

Ricordiamo che $\lim_{n\to\infty} (1+a/n)^n = e^a$

quindi, indicando con $a=1/x$, e ponendo $h=1/n$, si ottiene che $\lim_{h\to 0} (1+h/x)^{1/h} = e^{1/x}$ per cui il limite del rapporto incrementale esiste ed è uguale a

$\log(e^{1/x})= 1/x$

La derivata del logaritmo in base naturale è 1/x

CALCOLO DI DERIVATE

Si osserva che il calcolo della derivata per un logaritmo in una base b diversa dalla naturale procederebbe in modo analogo e si avrebbe

$(\log_b x)' = \log_b(e^{1/x}) = (1/x) \log_b e = 1/(x \cdot \log b)$

dove, nell'ultima uguaglianza, si è applicato il cambiamento di base, ripordandoci alla base naturale

CALCOLO DI DERIVATE

Per ottenere la **derivata della funzione $\exp(x)=e^x$** , possiamo applicare il teorema per la derivata della funzione inversa, considerando e^x come funzione inversa di $\log x$, si ha

$(e^x)'$ = $1/(1/e^x) = e^x$ per cui la derivata della funzione esponenziale con base e è uguale alla funzione stessa

Per una funzione esponenziale di base $b>0$, possiamo considerare la relazione $b^x = \exp(x \log b)$, per cui, utilizzando la derivata di una funzione composta, si ha
$(b^x)' = (\log b)\, b^x$

CALCOLO DI DERIVATE

Possiamo analogamente calcolare la derivata di una qualsiasi funzione potenza x^α, dalla relazione $x^\alpha = \exp(\log x^\alpha) = \exp(\alpha \log x)$, per cui

$$(\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}})' = x^\alpha (\alpha/x) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}-1}$$

Tale regola di derivazione per una funzione potenza vale, quindi, per ogni esponente reale

CALCOLO DI DERIVATE

Calcoliamo la derivata della funzione sinx:
Scriviamo il rapporto incrementale e usiamo le formule di prostaferesi

$[\sin(x+h)-\sin x]/h= [2\cos((x+h+x)/2)\sin((x+h)-x)/2)]/h=$
$[2\cos(2x+h)\sin(h/2)]/h =\cos(2h+x)\sin(h/2)/(h/2)$

Passando al limite per $h\to 0$ e ricordando che
$\lim_{x\to 0} (\sin x)/x =1$, otteniamo

(sinx)' = cosx
In modo analogo si ottiene **(cosx)' = - sinx**

CALCOLO DI DERIVATE

Per la **derivata della funzione tanx**, teniamo conto che tanx=sinx/cosx, applichiamo quindi la regola di derivazione per il rapporto tra due funzioni

(tanx)' = [cosxcosx-sinx(-sinx)]/(cosx)^2 **=1/ (cosx)^2**

Per la **derivata della funzione arcsinx**, usiamo la derivata della funzione inversa
(arcsinx)' = 1/cos(arcsinx), poiché cost=sqr(1-sin^{2}t) nell' intervallo [-π/2, π/2] dove è possibile invertire sint, si ottiene **(arcsinx)'** =1/sqr(1-sin^2(arcsinx))**=1/sqr(1-x^2)**

CALCOLO DI DERIVATE

Analogamente per la **derivata della funzione arccosx**, si ottiene

$(\arccos x)' = -1/\mathrm{sqr}(1-x^2)$

Per la **derivata della funzione arctanx**, si ha

$(\arctan x)' = \cos^2(\arctan x)$

scrivendo $1+\tan^2 x=1+\sin^2 x/\cos^2 x=1/\cos^2 x$, si ha $\cos^2 x=1/(1+\tan^2 x)$, da cui

$(\arctan x)'$ = $1/(1+ \tan^2(\arctan x))$**$=1/(1+x^2)$**