ESERCITAZIONE 8 : FUNZIONI LINEARI

Giacomo Tommei

e-mail: *tommei@dm.unipi.it*

web: *www.dm.unipi.it/~tommei*

Ricevimento: Martedi 16 - 18
Dipartimento di Matematica, piano terra, studio 126

27 Novembre 2012

Funzioni lineari

Le funzioni lineari da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ descrivono relazioni di proporzionalità tra incrementi: se $f(x)$ è una funzione lineare allora esiste un numero reale m tale che, se si incrementa di una quantità Δx l'argomento x, $f(x)$ si incrementa di $m\,\Delta x$.

Un'espressione generale per una funzione lineare è data da

$$\boxed{f(x) = m\,x + q} \tag{1}$$

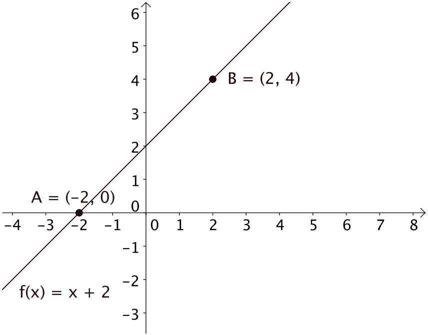
con $m, q \in \mathbb{R}$.
Il grafico di una funzione lineare è una **retta** non parallela all'asse delle ordinate.

Funzioni lineari: proprietà

- $f(x)$ è definita per ogni x reale.
- Esiste un unico numero reale x_0 tale $f(x_0) = 0$ qualsiasi siano i coefficienti m e q: tale valore si ricava risolvendo l'**equazione di primo grado** $m\,x + q = 0$; il numero x_0 è l'unico zero della funzione.
- Se $m > 0$ la funzione $f(x)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, se $m < 0$ la funzione $f(x)$ è strettamente descrescente su $\mathbb{R}$: la funzione, in questi due casi, è quindi monotona su tutto l'insieme dei numeri reali.
- L'equazione $f(x) = y_0$ ha un'unica soluzione per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, quindi la funzione è invertibile e la sua funzione inversa è ancora una funzione lineare definita su tutto $\mathbb{R}$: $f^{-1}(x) = (x - q)/m$; avremmo potuto dedurre l'invertibilità anche dalla considerazione precedente, infatti ogni funzione monotona su di un intervallo (in questo caso la funzione è monotona su tutto $\mathbb{R}$) ammette funzione inversa su quell'intervallo.

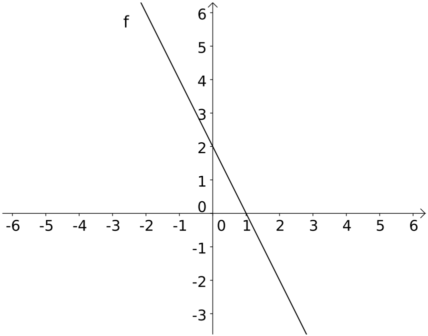
Esercizio 1

Trova e disegna il grafico della funzione lineare che assume il valore 0 quando $x = -2$ ed il valore 4 quando $x = 2$.

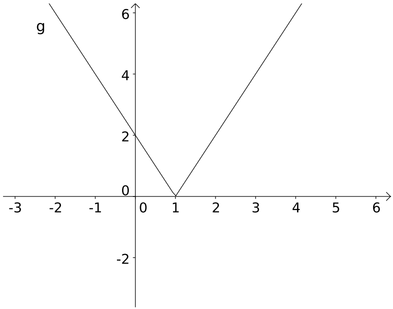


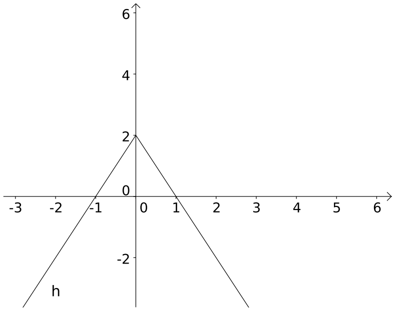
Esercizio 2

Data la funzione lineare $f(x) = -2\,x + 2$ disegna il grafico delle due funzioni lineari $g(x) = |f(x)|$ e $h(x) = f(|x|)$.



Esercizio 2





Esercizio 3

Scrivi l'equazione della retta r passante per i punti $A\,(2,0)$ e $B\,(-3,4)$.
Determina poi:

a) l'equazione della retta s parallela a r e passante per il punto $C\,(1,4)$;

b) l'equazione della retta t perpendicolare a r e passante per il punto $D\,(-2,-2)$.

Esercizio 3 - Soluzione

Calcoliamo il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A\,(2,0)$ e $B\,(-3,4)$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{2-(-3)} = -\frac{4}{5}$$

L'intercetta q si ricava imponendo il passaggio della retta di coefficiente angolare $-4/5$ per uno dei due punti, ad esempio il punto A:

$$y = -\frac{4}{5}\,x + q \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{4}{5}\cdot 2 + q \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{8}{5}$$

L'equazione della retta cercata è quindi

$$y = -\frac{4}{5}\,x + \frac{8}{5}$$

Esercizio 3 - Soluzione

a) Dobbiamo adesso determinare l'equazione della retta s parallela a r e passante per il punto $C\,(1,4)$. Vale il seguente importante risultato:

i coefficienti angolari di due rette parallele non verticali sono uguali.

Quindi il coefficiente angolare di s vale $-4/5$. Conoscendo il coefficiente angolare e un punto della retta sappiamo come scrivere l'equazione di s:

$$y-4=-\frac{4}{5}\,(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y=-\frac{4}{5}\,x+\frac{24}{5}$$

b) Per determinare l'equazione della retta t perpendicolare a r e passante per il punto $D\,(-2,-2)$ dobbiamo sfruttare un altro fondamentale risultato:

i coefficienti angolari di due rette perpendicolari (non parallele agli assi coordinati) sono uno l'antireciproco dell'altro (l'antireciproco è il reciproco cambiato di segno).

In pratica, se una retta ha coefficiente angolare m, tutte le rette a lei perpendicolari hanno coefficiente $-1/m$. Nel nostro esercizio la retta r ha coefficiente angolare $-4/5$, quindi le rette a lei perpendicolari (tra cui t) hanno coefficiente angolare pari a $5/4$. Poiché t passa per $D\,(-2,-2)$ la sua equazione è

$$y+2=\frac{5}{4}\,(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{5}{4}\,x+\frac{1}{2}$$

Nota che ovviamente la retta t è perpendicolare anche alla retta s, essendo r ed s parallele.

4) Risolvi le seguenti disequazioni di I grado:

a)

$$4\left(\frac{1}{2}-2\,x\right)-\frac{3\,x-2}{4}\leq-\frac{3}{8}+x-2$$

b)

$$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2-3\,\left(\frac{x}{2}+1\right)+\frac{2\,x}{5}-5\geq-\frac{34}{5}+\frac{x^2}{4}$$

5) Trova per quale valore di $m\in\mathbb{R}$, il valore $x=-1$ è soluzione dell'equazione $2\,(a\,x+2)-a\,x=1$.

6) La differenza tra due numeri interi è 12. Il valore ottenuto aggiungendo 2 al minore moltiplicato per 7 è uguale al valore ottenuto sottreando 2 al triplo del maggiore. Trova i due numeri.

Sistemi lineari

Un sistema lineare di due equazioni in due incognite x e y è un sistema della forma

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ d\,x + e\,y + f = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Tale sistema può essere

- **determinato**, se ammette una sola soluzione;
- **indeterminato**, se ammette infinite soluzioni;
- **impossibile**, se non ammette soluzioni.

Esercizio 7: sistemi lineari

Un distributore automatico di snack accetta monete da 50 centesimi, 1 euro e 2 euro. Vuotando il contenitore delle monete si trovano in totale 1000 euro. Determina il numero delle monete di ciascun tipo sapendo che le monete da 1 euro sono il triplo di quelle da 50 centesimi e che quelle da 2 euro sono 50 in meno dei pezzi da 50 centesimi.

Esercizio 7: sistemi lineari

Indichiamo con x il numero delle monete da 50 centesimi (mezzo euro), con y il numero delle monete da 1 euro e con z il numero delle monete da 2 euro. Sappiamo che il totale trovato nel contenitore delle monete è 1000 euro quindi

$$\frac{1}{2}\,x + y + 2\,z = 1000$$

o, equivalentemente, eliminando la frazione (si moltiplicano ambo i membri per 2)

$$x + 2\,y + 4\,z = 2000$$

Inoltre sappiamo che

$$y = 3\,x \qquad\qquad z = x - 50$$

Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema lineare di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} x + 2\,y + 4\,z = 2000 \\ y = 3\,x \\ z = x - 50 \end{cases}$$

Procediamo con il metodo di sostituzione. Le ultime due equazioni esprimono y e z come funzioni di x, quindi possiamo andare a sostituire tali espressioni nella prima equazione ricavandone una contenente solo l'incognita x:

$$x + 2\,y + 4\,z = 2000 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2\,(3\,x) + 4\,(x - 50) = 2000 \quad \Leftrightarrow$$

$$11\,x = 2200 \quad \Leftrightarrow \quad x = 200$$

Trovato il numero delle monete da 50 centesimi è facile trovare il numero delle altre monete:

$$y = 3\,x = 600 \qquad\qquad z = x - 50 = 150$$

8) Disegna la porzioni di piano definite dai seguenti sistemi di disequazioni lineari; calcola poi l'area della regione in b).

a) $$\begin{cases} y \geq 2\,x + 1 \\ y \leq -x + 3 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} -2 < y < 3 \\ -5\,x - 7 \leq y \\ x - 2 \leq y \end{cases}$$

9) Disegna la porzione di piano definita dalle seguenti disequazioni:

$$\begin{cases} -2 < y < 3 \\ -5\,x - 7 \leq y \\ x - 2 \leq y \end{cases}$$

Calcola poi l'area di tale regione di piano.