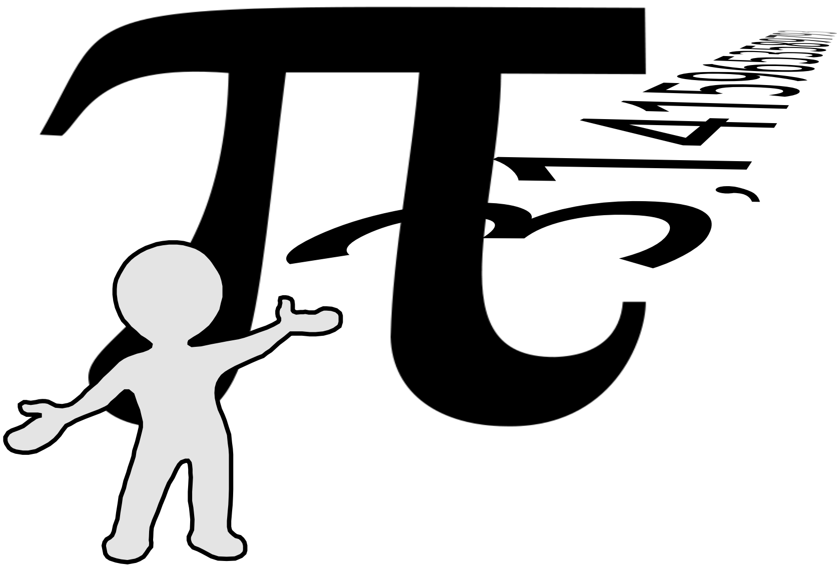
n° 0

Pisa, 16-25 Febbraio 2015

Matematica
il giornalino degli OpenDays

...notizie, giochi e pillole di matematica



IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Su indicazione della Commissione Orientamento.
Realizzazione a cura degli studenti Counseling 2014/2015:
Roberta Maccheroni
Arianna Santini
Maria Iolanda Serra
Dario Villanis Ziani
Coordinamento: Prof. Giovanni Gaiffi
email: *counseling.dm.unipi@gmail.com*

Introduzione

Questo giornalino, creato da studenti del corso di laurea in matematica, nasce in occasione degli OpenDays che l'Università di Pisa organizza ogni anno, aprendo le sue strutture agli studenti delle scuole superiori, e offrendo un servizio di orientamento a cura di studenti universitari e professori. L'obiettivo di queste pagine è quello di non far terminare questa esperienza con la conclusione dell'evento. Vorremmo dare a chi è interessato alcuni spunti su cosa vuol dire fare matematica, stimolare l'interesse per alcuni argomenti poco trattati a scuola, trasmettere il nostro entusiasmo. Inoltre presenteremo alcuni problemi, sfide e giochi matematici.

Non mancheremo ovviamente di illustrare i dettagli del corso di studi in Matematica; troverete una breve descrizione dei diversi percorsi, e un'idea su quali siano i possibili sbocchi lavorativi.

Abbiamo pensato di inserire due articoli divulgativi, con lo scopo sia di introdurre un pensiero e un linguaggio tipici della matematica, sia di mostrare la vastità del suo campo speculativo. In particolare:

- "Contare gli infiniti", ovvero gli infiniti sono tutti uguali? Possiamo contarne gli elementi? E in che modo? Rispondiamo subito!

- "Matematica vs Armageddon", ovvero come la matematica può aiutarci a tenere sotto controllo gli asteroidi e a non fare la fine dei dinosauri.

Per chi ha voglia di mettersi in gioco abbiamo inserito degli esercizi interessanti, alcuni tratti dalle gare delle Olimpiadi della Matematica ed altri dalla raccolta "Il Fibonacci", a cura di Franco Conti.

Potrete anche trovare una piccola raccolta di giochi, stimolanti sia da provare con gli amici sia divertendosi a cercare le strategie migliori.

Per finire, alcuni consigli di lettura, per viaggiare attraverso storie, curiosità e problemi matematici:

- libri;

- siti web.

Non resta che augurare a tutti una piacevole esplorazione!

Indice

Iscriversi a matematica

Organizzazione del percorso di studi

La laurea triennale in matematica prevede il conseguimento di 180 CFU mentre la laurea magistrale, a cui si può accedere dopo aver conseguito una laurea triennale, consiste nel raggiungimento di 120 CFU.

CFU = Credito Formativo Universitario: è la "misura" europea con cui vengono pesati gli esami e le prove finali. Un CFU corrisponde orientativamente a 25 ore di lezione e studio individuale.

Per la laurea triennale i curriculum di indirizzo sono 2:

- curriculum fondamentale;
- curriculum computazionale.

Gli esami da sostenere, suddivisi per anno, sono riportati nelle seguenti tabelle:

<u>Curriculum fondamentale</u>

I ANNO	II ANNO	III ANNO
- Aritmetica (9 CFU) - Analisi matematica 1 (15 CFU) - Fisica 1 (9 CFU) - Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU) - Geometria analitica ed algebra lineare (15 CFU) - Laboratorio di comunicazione mediante calcolatore (3 CFU)	- Algebra 1 (6 CFU) - Analisi matematica 2 (12 CFU) - Analisi numerica con laboratorio (9 CFU) - Elementi di probabilità e statistica (6 CFU) - Geometria 2 (12 CFU) - Inglese scientifico (6 CFU) - *Esame a scelta (6 CFU)* - Laboratorio didattico di matematica computazionale (3 CFU)	- Sistemi dinamici (6 CFU) - *Fisica II (6 CFU)* - *Fisica III con laboratorio (9 CFU)* - *Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)* - *4 Esami a scelta (24 CFU)* - Prova finale (9 CFU)

Curriculum computazionale

I ANNO	II ANNO	III ANNO
- Aritmetica (9 CFU) - Analisi matematica 1 (15 CFU) - Fisica 1 (9 CFU) - Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU) - Geometria analitica ed algebra lineare (15 CFU) - Laboratorio di comunicazione mediante calcolatore (3 CFU)	- Algebra 1 (6 CFU) - Analisi matematica 2 (12 CFU) - Analisi numerica con laboratorio (9 CFU) - Elementi di probabilità e statistica (6 CFU) - Geometria 2 (12 CFU) - Inglese scientifico (6 CFU) - *Algoritmi e strutture dati (6 CFU)* - Laboratorio didattico di matematica computazionale (3 CFU)	- Sistemi dinamici (6 CFU) - *Calcolo scientifico (6 CFU)* - *Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)* - *Laboratorio computazionale (6 CFU)* - *Ricerca Operativa (6 CFU)* - *3 Esami a scelta (18 CFU)* - Prova finale (9 CFU)

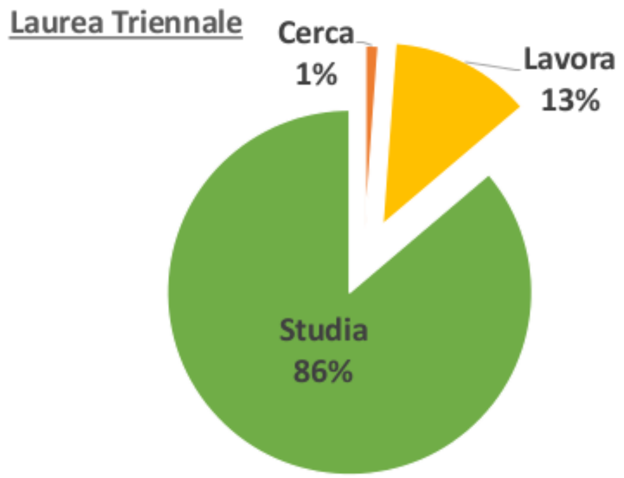
Per quanto riguarda la laurea magistrale, i piani di studio sono 5 e permettono di approfondire gli ambiti della matematica che più interessano a ciascun studente.

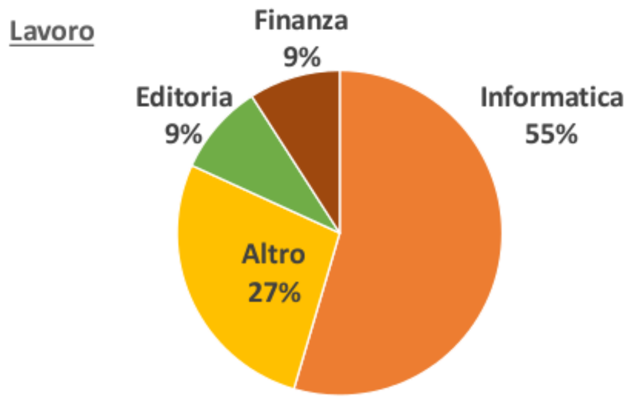
Sbocchi lavorativi

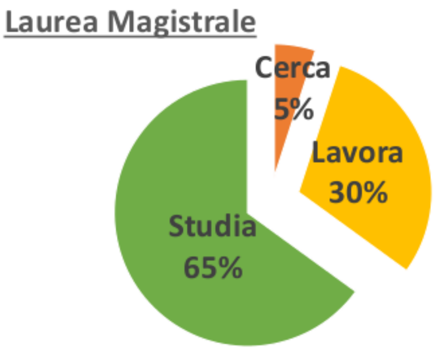
Quando uno studente studia matematica, si pensa che il suo futuro lavoro sarà quello di insegnante, ma questa è solo una delle possibilità. È vero che attualmente presso il nostro dipartimento sono attivati anche i corsi TFA (post laurea) per la formazione degli insegnanti, ma in generale l'intero mondo del lavoro apprezza la figura del matematico per l'adattabilita e la visione d'insieme. Infatti, sebbene le conoscenze tecniche non siano approfondite, qualità come la conoscenza teorica delle soluzioni e l'approccio molto generale ai problemi, ben si adattano a vari ambiti lavorativi. E queste sono competenze che un laureato in matematica possiede sicuramente. Gli esempi più comuni di applicazione sono l'informatica e la finanza ma ci sono matematici che lavorano nell'ambito della meccanica celeste, della sismologia, dell'automazione, dell'editoria ...

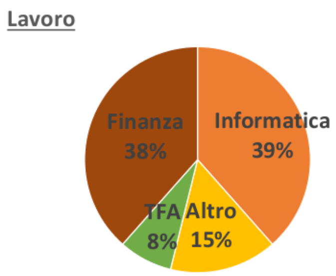
Inoltre una fonte di lavoro rilevante per i matematici e' la ricerca stessa e la carriera accademica.

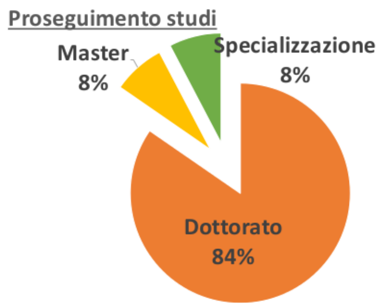
I dati dei laureati nell'anno 2012 e nell'anno 2013, rilevati a 12 mesi dal conseguimento della laurea, danno un'idea di questo:











DOTTORATO DI RICERCA = corso universitario di studi successivo alla laurea, finalizzato al raggiungimento di risultati originali di valore scientifico.

Ulteriori informazioni si possono trovare sul sito del Dipartimento di Matematica

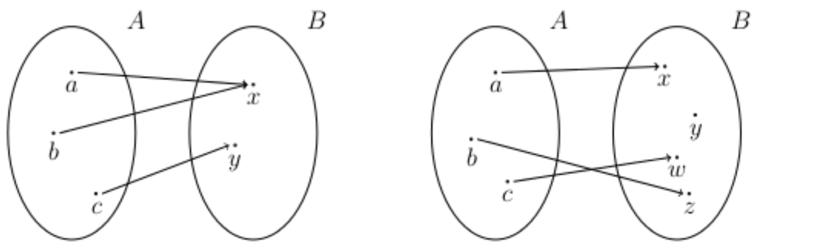
http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento

.

Contare gli infiniti

Tutti noi, fin dalle scuole elementari, siamo in grado di contare un numero finito di oggetti, e di dire se un insieme abbia più elementi di un altro: ad esempio, l'insieme dei giorni in un anno ha più elementi dell'insieme dei mesi in un anno, l'insieme dei giocatori in una partita di calcio ha più elementi dell'insieme degli arbitri nella stessa partita, e così via. In linguaggio matematico il numero di elementi di un insieme A si dice *cardinalità* e si denota con $|A|$ (o talvolta $\#A$). Così ad esempio l'insieme dei giorni in un anno ha cardinalità 365 (se non bisestile), l'insieme dei mesi in un anno ha cardinalità 12, eccetera. Ma quando si tratta di passare ad insiemi infiniti, le cose si fanno più complicate. Quanti infiniti esistono? Gli infiniti sono tutti uguali, tutti diversi, alcuni uguali ed alcuni diversi? Ad esempio quanti sono i numeri naturali? Sono tanti quanti i numeri interi? Sebbene la risposta possa sembrare semplice, non è affatto così; certamente non possiamo più contare direttamente gli elementi. Però è lecito chiedersi quanto siano "grandi" gli insiemi, pertanto dobbiamo tentare di definire il concetto di cardinalità in altro modo.

Dovrebbe essere già noto al lettore il concetto di funzione, che comunque richiamiamo brevemente. Siano A e B due insiemi; una *funzione* associa ad ogni elemento dell'insieme A *uno e un solo* elemento dell'insieme B: si dice funzione *definita su A a valori in B* e si denota $f : A \longrightarrow B$. Niente vieta che a due diversi elementi di A sia associato lo stesso elemento dell'insieme B, si pensi ad esempio alla funzione elevamento al quadrato definita su tutti i numeri reali: il quadrato di 3 è uguale al quadrato di -3. Non è neanche detto che un qualunque elemento di B possa essere raggiunto mediante la funzione a partire da un elemento di A: pensando ancora alla funzione $f(x) = x^2$ con $A = B = \mathbb{R}$, un numero negativo non è quadrato di alcun numero reale. Diciamo che una funzione è *iniettiva* se, dati due diversi elementi x ed x' di A, si ha $f(x) \neq f(x')$. Una funzione invece è *suriettiva* se per ogni elemento y di B esiste *almeno* un elemento x di A tale che $f(x) = y$. Infine, una funzione è *biunivoca* se per ogni elemento y di B esiste *esattamente* un elemento x di A tale che $f(x) = y$. Nelle due figure che seguono presentiamo due esempi grafici: la figura a sinistra rappresenta una funzione suriettiva ma non iniettiva tra A e B; la figura a destra invece rappresenta una funzione iniettiva ma non suriettiva tra tali due insiemi.



Le funzioni sono il concetto che ci permetterà di estendere in modo naturale la definizione di cardinalità ad insiemi infiniti. Diciamo che un insieme A ha cardinalità minore o uguale a quella di un altro insieme B, e scriviamo $|A| \leq |B|$, se esiste una funzione iniettiva $f : A \longrightarrow B$. Se inoltre esiste una funzione biunivoca da A a B, allora essi hanno la stessa cardinalità, e scriviamo $|A| = |B|$; se infine esiste una funzione iniettiva da A a B ma non è possibile trovare una funzione biunivoca tra essi, allora la cardinalità di A è strettamente minore di quella di B, e scriviamo $|A| < |B|$. Vedremo tra poco che avere un'inclusione stretta tra due insiemi (ossia avere un insieme propriamente incluso in un altro, come i numeri pari ed i numeri naturali) non implica necessariamente che le loro cardinalità siano diverse; anzi, in molti casi non è così.

È facile verificare che il confronto tra cardinalità ottenuto mediante le funzioni si accorda bene con il caso finito, e pertanto estende l'intuizione del "contare" gli elementi. Vogliamo porre l'accento sul fatto che costruire una funzione da un insieme ad un altro non ci dice direttamente *quanti* elementi abbia uno specifico insieme, ma piuttosto se ne abbia più o meno di un altro: come già detto si tratta di un *confronto* tra cardinalità.

Siamo dunque pronti per affrontare la questione delle cardinalità infinite. Cominciamo dai numeri naturali. Il matematico tedesco Georg Cantor (1845-1918) ha chiamato la cardinalità dell'insieme dei numeri naturali $\aleph_0$ ($\aleph$ si legge "alef", ed è la prima lettera dell'alfabeto ebraico). Intanto, possiamo facilmente vedere che $\aleph_0$ è maggiore di qualsiasi numero naturale; se ad esempio prendiamo un insieme con 288 elementi, è facile costruire una funzione iniettiva da tale insieme nell'insieme dei numeri naturali; è invece impossibile costruire una funzione biunivoca tra questi due insiemi, pertanto $288 < \aleph_0$; lo stesso ragionamento funziona con 7, 2.056.786 e con qualsiasi altro numero naturale.

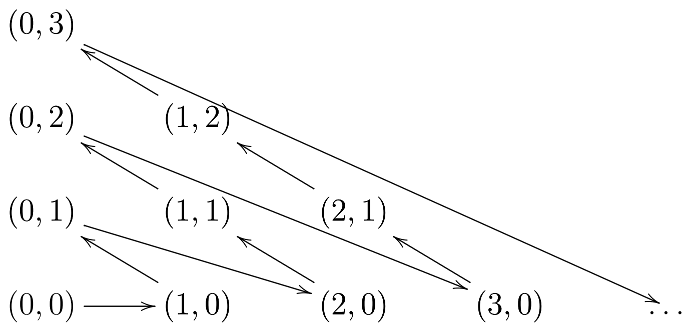
Si tratta adesso di vedere se, prendendo altri insiemi infiniti, le loro cardinalità siano uguali o meno a quella dei numeri naturali. Un insieme di cardinalità uguale a quella dei numeri naturali si dice *numerabile*. Prima di procedere però dobbiamo fare due osservazioni che sembrano banali ma che in realtà nel caso infinito non lo sono affatto. In effetti la prima di queste è un vero e proprio teorema, detto teorema di *Cantor-Bernstein*, il quale ci assicura che la relazione tra cardinalità è simmetrica: se $|X| \leq |Y|$ e se $|Y| \leq |X|$, allora $|X| = |Y|$; in altre parole, se esiste una funzione iniettiva da X ad Y e se esiste una funzione iniettiva da Y a X, allora esiste una funzione biunivoca tra X e Y. La seconda osservazione, decisamente più semplice e che il lettore può provare a dimostrare, assicura che se $|X| \leq |Y|$ e se $|Y| \leq |Z|$, allora $|X| \leq |Z|$; in altre parole, se esiste una funzione iniettiva da X ad Y e se esiste un'altra funzione iniettiva da Y a Z, allora esiste anche una funzione iniettiva da X a Z.

Vediamo adesso, con un racconto molto famoso, cosa può succedere di strano quando consideriamo le cardinalità infinite. L'*albergo di Hilbert* è un albergo molto particolare: ha $\aleph_0$ stanze, tante quante i numeri naturali. In un periodo particolarmente affollato, l'albergo è completamente pieno. Un giorno però arriva un nuovo ospite, che chiede se vi siano stanze libere. "Nessun problema!" risponde il gestore della struttura, facendo spostare i propri ospiti nella stanza successiva a quella che occupano: ossia fa spostare l'ospite della stanza n nella stanza $n+1$. Così facendo, tutti i vecchi ospiti hanno trovato una nuova sistemazione, ed il nuovo arrivato può prendere possesso della stanza numero 0. Il giorno dopo arrivano k nuovi ospiti, diciamo $k = 100$ per semplicità, ma il ragionamento che stiamo per fare funziona con qualsiasi numero. Anch'essi chiedono se vi sia disponibilità di stanze, ed il gestore, analogamente a quanto fatto il giorno precedente, fa spostare gli ospiti, stavolta dalla stanza n alla stanza $n + 100$; in questo modo le stanze da 0 a 99 vengono liberate ed i nuovi arrivati possono essere accolti. Il giorno successivo arriva una gita molto affollata. "Quanti siete?" chiede il gestore. "Infiniti! Precisamente, numerabili!" risponde la guida. Senza farsi prendere dallo sconforto, il proprietario predispone un nuovo spostamento di stanza: l'occupante della stanza numero n si deve spostare nella stanza numero $2n$. In questo modo tutti i nuovi arrivati possono prendere possesso delle camere con numero dispari.

Questo racconto mostra intanto che l'unione tra l'insieme dei numeri naturali ed un qualsiasi singoletto (insieme formato da un solo elemento) è ancora numerabile; ad esempio $|\,\mathbb{N} \cup \{\pi\}| = |\,\mathbb{N}\,|$. Ma non solo, in realtà resta numerabile anche l'unione dell'insieme dei numeri naturali ed un qualsiasi insieme finito, cioè $|\,\mathbb{N} \cup \{a_1, \dots, a_k\}| = |\,\mathbb{N}\,|$ per ogni numero naturale k; ossia esiste una funzione biunivoca tra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri naturali più un numero finito di elementi. Ma c'è di più: abbiamo anche mostrato che possiamo posizionare infiniti (purché numerabili) nuovi ospiti nell'albergo sebbene sia già pieno, ossia che $|\,\mathbb{N} \cup \mathbb{N}\,| = |\,\mathbb{N}\,|$. In realtà possiamo spingerci ancora oltre. Consideriamo l'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ossia il prodotto cartesiano di due copie dei numeri naturali; in parole povere, l'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è costituito da *coppie* di numeri naturali, ossia i suoi elementi sono della forma $(1,1)$, $(2,7)$, $(256,14)$ e così via. Vogliamo provare che la cardinalità di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è uguale alla cardinalità di $\mathbb{N}$. Dobbiamo pertanto costruire una funzione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ed il compito non è facile come i precedenti, ma è comunque alla nostra portata. Posizioniamo gli elementi di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ su un piano:

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & & & \\
(0,3) & \vdots & & \iddots & \\
(0,2) & (1,2) & (2,2) & (3,2) & \dots \\
(0,1) & (1,1) & (2,1) & (3,1) & \dots \\
(0,0) & (1,0) & (2,0) & (3,0) & \dots
\end{array}$$

Il cosiddetto *argomento diagonale di Cantor* suggerisce di procedere nel modo suggerito dalla seguente figura:



ossia consideriamo prima gli elementi la cui somma delle componenti sia 0 (il solo $(0,0)$); una volta esauriti questi, consideriamo gli elementi la cui somma delle componenti sia 1, ordinati a partire da quello con prima componente più grande (quindi $(1,0)$ e $(0,1)$); poi passiamo agli elementi la cui somma delle componenti sia 2, ordinati come i precedenti (quindi $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$); e così via. In questo modo ad ogni passo dobbiamo contare solo un numero finito di elementi, prima di passare alla diagonale successiva. Si può facilmente verificare che questo procedimento costruisce una funzione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. È come se nell'albergo di Hilbert fosse arrivata una quantità numerabile di gite ciascuna composta da una quantità numerabile di persone: c'è posto anche per loro, basta numerare questi nuovi ospiti con una coppia di numeri naturali, dove la prima componente indica il numero della gita alla quale appartengono e la seconda componente indica il partecipante; ad esempio, l'ospite numero $(5,14)$ è il quattordicesimo partecipante della quinta gita.
Dunque, abbiamo appena visto che l'insieme dei numeri naturali ha la stessa cardinalità dell'insieme delle coppie di numeri naturali, cosa che in effetti sembra piuttosto strana, e che mostra come con le cardinalità infinite possano accadere cose che nel caso finito sono escluse. Nascosta nel racconto della storia dell'albergo di Hilbert, c'è anche la dimostrazione di un altro fatto, ossia che l'insieme dei numeri pari ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali, sebbene il primo insieme sia strettamente incluso nel secondo: c'è infatti una funzione biunivoca tra questi due insiemi, data da $n \mapsto 2n$.

E i numeri interi $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ quanti sono? Intuitivamente verrebbe da pensare che siano più dei numeri naturali, ma ormai abbiamo capito che l'intuito che abbiamo sviluppato nel caso finito può non funzionare con insiemi infiniti. Ed in effetti, anche l'insieme dei numeri interi ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali. Proviamo quindi a costruire una funzione biunivoca tra questi due insiemi. L'idea è quella di associare ai numeri naturali pari gli interi positivi, ed ai numeri naturali dispari gli interi negativi, nel seguente modo: se n è dispari, gli associamo il numero $-\frac{n+1}{2}$;se n è pari, gli associamo il numero $\frac{n}{2}$. Ossia

$$0 \mapsto 0, \qquad 1 \mapsto -1, \qquad 2 \mapsto 1, \qquad 3 \mapsto -2$$

eccetera; anche questa funzione è biunivoca.

Possiamo andare oltre, e dimostrare che i numeri razionali sono tanti quanti i numeri naturali. Iniziamo con il provare che l'insieme dei razionali positivi è numerabile. Per far ciò, ci viene in soccorso quanto detto per il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ossia l'insieme delle coppie di numeri naturali: possiamo leggere le due componenti di tale coppia come, rispettivamente, numeratore e denominatore di una frazione (a patto di considerare, al posto dei numeri naturali, i numeri naturali positivi, per evitare eventi spiacevoli come uno zero al denominatore: questo comunque non cambia la sostanza, essendo i numeri naturali tanti quanti i numeri naturali positivi); ad esempio l'elemento $(2, 1)$ corrisponde alla frazione $\frac{2}{1}$, l'elemento $(4, 7)$ corrisponde alla frazione $\frac{4}{7}$ e così via. In realtà questi non sono proprio i numeri razionali, ma sono qualcosa in più, perchè diverse coppie possono rappresentare la stessa frazione; in effetti però i numeri razionali si possono ottenere dalle coppie di numeri naturali considerando come equivalenti due coppie che danno luogo ad una stessa frazione, e prendendo quindi un unico rappresentante per ogni famiglia di coppie equivalenti: ad esempio, dato che le coppie $(3, 2)$, $(6, 4)$, $(18, 12)$ ed in generale $(3n, 2n)$ danno luogo tutte alla stessa frazione $\frac{3}{2}$, prendiamo $(3, 2)$ come rappresentante di questa famiglia (numerabile) di coppie equivalenti. Pertanto, l'insieme di queste coppie di rappresentanti dei numeri razionali positivi risulta un sottoinsieme di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, che sappiamo avere la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, ed è facile dimostrare che un sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è ancora numerabile (esercizio per il lettore!). Passare poi all'insieme di tutti i razionali è facile: è sufficiente provare, in modo analogo a quanto fatto per i numeri naturali e per i numeri interi, che i numeri razionali positivi sono tanti quanti tutti i numeri razionali; oppure basta considerare coppie di numeri in cui la prima componente possa essere negativa, ossia elementi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

A questo punto la domanda sorge spontanea: ma allora tutti gli infiniti sono uguali? La risposta è no, ed anzi possiamo "salire" di cardinalità in modo piuttosto semplice, ossia considerando l'insieme delle parti. Dato un insieme A, l'*insieme delle parti* di A è l'insieme dei suoi sottoinsiemi e si denota con $\mathcal{P}(A)$. Facciamo degli esempi: se A ha cardinalità 1, ad esempio $A = \{a\}$, allora il suo insieme delle parti è $\{\emptyset, \{a\}\}$, in quanto anche A è un sottoinsieme di se stesso; pertanto in questo caso $\mathcal{P}(A)$ ha cardinalità 2. Se passiamo ad un insieme con due elementi, diciamo $A = \{a, b\}$, allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Proseguendo in questo modo si intuisce che se $|A| = n$, allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ (lo sapreste dimostrare?). Passando agli insiemi infiniti, si può dimostrare (ma non lo faremo qui) che la cardinalità dell'insieme delle parti è strettamente maggiore della cardinalità dell'insieme di partenza. Dunque, nel caso dei numeri naturali, avremo che $|\,\mathbb{N}\,| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Possiamo anche provare che $|\,\mathbb{N}\,| < |\,\mathbb{R}\,|$: il lettore potrà trovare una dimostrazione, mediante il cosiddetto *secondo argomento diagonale di Cantor*, nella versione estesa di questo articolo, pubblicata in rete; in verità risulta $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\,\mathbb{R}\,|$. Quindi il semplice insieme numerico dei reali ci fornisce un esempio di come anche le cardinalità infinite possano aumentare.

Come ultima cosa, ci sembra notevole osservare che la cardinalità dell'insieme dei numeri reali è pari alla cardinalità dell'intervallo $[0, 1]$, ed anzi essa è pari alla cardinalità di un qualsiasi intervallo limitato $[a, b]$. Riuscite a pensare ad un'adeguata funzione biunivoca? Se questo breve articolo vi ha incuriosito, potete trovare maggiori dettagli nella sua versione estesa, pubblicata in rete alla pagina:

www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days.

In breve, per tirare le somme di quanto abbiamo mostrato riguardo alla teoria delle cardinalità, possiamo riassumere queste pagine nel seguente schema:

$$|\,\mathbb{N}\,| = |\,\mathbb{Z}\,| = |\,\mathbb{Q}\,| < |\,\mathbb{R}\,| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < \\ < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < \dots$$

Dario Villanis Ziani
laureato triennale in Matematica

Matematica vs Armageddon

A cosa serve la Matematica? Se le sono chiesto in tanti (...e molti altri continueranno a farlo), la risposta è complessa, e poche righe sarebbero inutili. Possiamo affermare, senza possibilità di smentita, che la Matematica pervade ogni cosa ed è necessaria in molti campi e in diversi aspetti della nostra vita. Un contesto particolare è la protezione del nostro pianeta da pericoli provenienti dallo spazio (non pensate subito ad un'invasione aliena...). Detto in altri termini, la Matematica ci può aiutare a non fare la fine dei dinosauri. Questi rettili giganteschi hanno dominato la Terra da 230 a 65 milioni di anni fa, quando improvvisamente si sono estinti. L'ipotesi più accreditata per la causa dell'estinzione (ipotesi di Alvarez, 1980) è quella di un impatto asteroidale o cometario che ha fortemente alterato l'ecosistema in cui vivevano i dinosauri. Nel 1990 è stato identificato il cratere di Chicxulub, sulla costa dello Yucatan, in Messico, che ha i requisiti per soddisfare l'ipotesi di Alvarez: questo cratere ha un diametro stimato di circa 180 chilometri, e il suo ritrovamento è stato possibile solo grazie a tecniche moderne in quanto è interamente sommerso dal mare. Gli asteroidi da tenere sotto controllo non sono però solo quelli che portano ad un'estinzione di massa, ce ne sono molti altri, più piccoli, che possono creare danni considerevoli. Nell'estate del 1908 un oggetto, probabilmente un asteroide roccioso con un diametro stimato tra i 60 e i 190 m, esplose ad un'altitudine tra i 6 e i 10 Km vicino a Tunguska, in Siberia. Nell'esplosione furono rilasciati circa 15 Megatons di energia bruciando svariati ettari di tundra siberiana. Il 15 Febbraio 2013 a Chelyabinsk, in Russia, un oggetto di natura asteroidale (di circa 18 m di diametro) è esploso nei cieli a 23 Km di altezza provocando più di 1000 feriti e molti milioni di euro di danni (su YouTube si trovano diversi filmati). Pensate se un simile oggetto (o, peggio, un oggetto di tipo Tunguska) invece di esplodere e frantumarsi finendo la sua corsa in un lago ghiacciato, avesse impattato su una città o su una zona popolosa, oppure in mare creando forti tsunami. E' questo il motivo che spinge gli scienziati a tenere sotto controllo gli incontri ravvicinati di asteroidi. Naturalmente non si deve creare allarmismo, consultando le frequenze degli impatti e le loro conseguenze in termini di energia rilasciata si può notare che un evento tipo Tunguska si verifica in media ogni 100 anni, mentre un evento catastrofico come quello che ha portato all'estinzione dei dinosauri ogni 100 milioni di anni. Quindi, da una parte la statistica ci può far stare tranquilli, ma dall'altra la comunità scientifica non può ignorare il problema, che, come vedremo nei successivi paragrafi, non è così semplice da risolvere.

I nostri vicini scomodi

La parola asteroide significa "come una stella", anche se questi corpi minori del Sistema Solare non emettono luce propria, ma sono visibili solo perché riflettono la luce solare. Le dimensioni degli asteroidi variano notevolmente: si va dalle centinaia di chilometri in diametro (*Cerere*, il più grande ed il primo ad essere scoperto, misura 913 Km in diametro) ai pochi metri. La massa totale di tutti gli asteroidi è inferiore a quella della Luna. Vi sono asteroidi in diverse posizioni del Sistema Solare e se ne conoscono più di 500000. La maggioranza di essi orbita nella fascia principale (detta anche cintura principale, *Main Belt*) tra Marte e Giove. I pianetini che maggiormente ci interessano, però, sono quelli che arrivano in un intorno della Terra e sperimentano incontri ravvicinati con il nostro pianeta: tali asteroidi sono chiamati NEAs (*Near Earth Asteroids*) e hanno la proprietà di avere una distanza minima dal Sole (perielio) inferiore a 1.3 Unità Astronomiche (le orbite di questi oggetti sono ellissi con il Sole in uno dei fuochi secondo la prima legge di Keplero). Fu con la scoperta di *433 Eros* (1898) che si accertò l'esistenza di tali asteroidi e al momento (Gennaio 2015) se ne contano 12051. L'attenzione per questi oggetti aumentò notevolmente con l'avvento dell'era spaziale e, in particolare, con le missioni lunari. Queste missioni misero in luce la natura da impatto dei crateri sulla Luna costringendo la comunità scientifica a porsi il problema degli impatti sulla Terra. Il monitoraggio di impatti (impact monitoring) è quindi una "scienza" giovane, basti pensare che nel 1998, anno in cui uscirono ben due film americani sul tema ("Armageddon" e "Deep Impact"), ancora non esistevano algoritmi per il calcolo della probabilità d'impatto.

Ci serve la Matematica!

Capire se un asteroide può in un futuro (prossimo o lontano) impattare con il nostro pianeta è un problema difficile che può essere suddiviso in tre passi.

1) Guardare il cielo e scoprire gli oggetti. Più osservazioni si hanno (purché siano di qualità), maggiore è l'accuratezza con la quale si può conoscere l'orbita dell'oggetto.

2) Calcolare, a partire dalle osservazioni, le orbite degli oggetti scoperti (**determinazione orbitale**).

3) Capire, con le informazioni a disposizione (osservazioni e orbite), se in futuro gli oggetti potranno impattare con il nostro pianeta, calcolando una probabilità d'impatto (**impact monitoring**).

Il passo 1) è compito degli astronomi di tutto il mondo, mentre per i passi 2) e 3) la Matematica è essenziale. La determinazione dell'orbita di un corpo celeste è un processo costituito da due fasi: (I) costruzione di un'orbita preliminare (chiamata anche orbita nominale) a partire da un numero minimo di osservazioni; (II) perfezionamento dell'orbita con metodi correttivi grazie ad un numero più consistente di osservazioni. Tradizionalmente esistono due metodi per il calcolo di orbite preliminari, il metodo di Laplace (matematico, fisico e astronomo francese, 1749-1827) ed il metodo di Gauss (matematico, fisico e astronomo tedesco, 1777-1855). In entrambi i metodi si cerca di determinare un'orbita kepleriana determinata dall'attrazione gravitazionale agente tra il corpo e il Sole. La base di partenza è data da tre osservazioni, ognuna delle quali è costituita da una terna (t, α, δ) in cui t rappresenta l'istante dell'osservazione, α l'ascensione retta e δ la declinazione del corpo (due angoli che servono a individuare l'oggetto sulla sfera celeste, come un punto sulla superficie terrestre è individuato da longitudine e latitudine). Ciò che non conosciamo è la distanza dell'oggetto, ed è proprio tale quantità che deve essere calcolata. Si tratterà, nella risoluzione del problema, di trovare le radici di un polinomio di ottavo grado (peraltro tale polinomio risulterà simile in entrambi i metodi), e scoprire quali di queste possono essere accettate e quali invece devono essere scartate. Dovremo tener conto del fatto che le osservazioni iniziali contengono un errore di misura in nessun modo eliminabile; inoltre sarà necessario procedere ad ulteriori approssimazioni, utilizzando metodi numerici dei quali non è sempre assicurata la convergenza. La soluzione del problema non è quindi di per sè garantita (anzi ci sono casi in cui è impossibile trovarla). Nonostante questo, i metodi in questione sono ancora molto attuali e permettono spesso di risolvere il problema della costruzione di un'orbita preliminare. Naturalmente esistono oggi altri metodi per il calcolo di un'orbita preliminare, alcuni dei quali sviluppati dal Gruppo di Meccanica Celeste dell'Università di Pisa pochi anni fa. Con l'aggiunta di nuove osservazioni l'orbita preliminare può essere migliorata con il metodo dei minimi quadrati, inventato da Gauss, che permise di ritrovare l'asteroide *Cerere* (scoperto da Giuseppe Piazzi il primo giorno dell'anno 1801) un anno circa dopo la scoperta.

Ogni volta che calcoliamo un'orbita dobbiamo tener conto della sua incertezza, dovuta alla propagazione degli errori di misura negli algoritmi. Quindi se vogliamo scoprire possibili impatti di un certo oggetto nel futuro dobbiamo, non solo propagare la sua orbita nominale, ma anche l'incertezza associata. Ed è qui che il problema si complica a causa della natura caotica delle orbite.

Breve storia del caos

Un sistema caotico ha le seguenti caratteristiche:

a) l'evoluzione su tempi lunghi non è predicibile e simula un processo stocastico, ovvero una variazione casuale del sistema;

b) due sistemi con condizioni molto vicine possono avere un futuro radicalmente diverso;

c) le orbite degli elementi che compongono il sistema restano generalmente confinate, ovvero il sistema non evolve verso l'infinito.

Contrariamente a quanto si tenda a pensare comunemente dire che un sistema è caotico non vuole dire che sia instabile, ma piuttosto che sia non predicibile: la nostra conoscenza della sua evoluzione ha un orizzonte temporale limitato che dipende dal sistema in considerazione. La Teoria del Caos è una disciplina relativamente giovane che, nella seconda metà del Novecento ha fatto breccia nell'immaginario collettivo anche grazie a numerosi romanzi e film. E' famoso il personaggio di Ian Malcolm, il matematico del libro (e dell'omonimo film, interpretato magistralmente da Jeff Goldblum) "Jurassic Park", il quale illustra il caos parlando del famoso effetto farfalla, enunciato per la prima volta dal matematico statunitense Edward Norton Lorenz (1917 - 2008): una farfalla sbatte le ali a Pechino e a Central Park, invece di essere soleggiato, piove. Lorenz fu colui che riscoprì il caos negli anni Sessanta del secolo scorso, ma il primo a riscontrare fenomeni caotici fu un brillante matematico francese Henri Poincaré (1854 - 1912). Nel 1885 il re Oscar II di Svezia, per celebrare il suo sessantesimo compleanno, decise di offrire un premio di 2500 corone a chiunque fosse stato in grado di descrivere matematicamente il moto di un certo numero di corpi soggetti alla forza di attrazione gravitazionale, quella descritta da Newton un paio di secoli prima. L'intento era chiaro: sfruttare la potenza della Matematica per predire il futuro, ma soprattutto la stabilità del Sistema Solare. Il problema, noto oggi come problema degli N-corpi gravitazionale, è difficilissimo perché appartiene a quella classe di problemi matematici detti non integrabili, ovvero la soluzione non può essere espressa mediante un algoritmo che include quadrature (calcolo di integrali) e funzioni implicite. Nonostante il problema fosse così difficile, il premio fu assegnato a Poincaré che studiò il moto di tre corpi, dimostrando che la soluzione non è esprimibile in forma esplicita. Nel lavoro che gli valse il premio enunciò inoltre un risultato di stabilità sul moto di questi tre corpi, a cui era arrivato arrotondando differenze molto piccole nelle posizioni dei corpi, pensando che ciò non avrebbe influito sul risultato finale. Solo dopo la consegna del lavoro, si accorse di aver commesso un grave errore: a differenza di quanto aveva creduto inizialmente, un piccolo cambiamento nelle condizioni iniziali portava ad orbite completamente diverse. Si affrettò quindi a contattare l'editore per far cessare la stampa del suo lavoro e si prodigò per recuperare e distruggere tutte le copie già stampate. Si vocifera che dovette ricomprarne una buona quantità spendendo più delle 2500 corone del premio. Ma dopo l'errore, cosa sarebbe successo al premio? Sembrava che stesse per scoppiare uno scandalo e invece, come spesso succede quando si fa ricerca, un errore clamoroso aveva spianato la strada ad un risultato sensazionale: Poincaré aveva scoperto il caos. I tempi, però, non erano maturi per quella scoperta. Con l'inizio del Novecento le attenzioni della comunità scientifica (e quindi anche di

Poincaré) si spostarono verso nuove teorie fisiche, la teoria della relatività (ristretta e generale) di Albert Einstein (1879-1955) e la meccanica quantistica di Max Planck (1858-1947), che avrebbero influenzato tutto il secolo. Toccò allora a Lorenz riscoprire il caos durante alcune simulazioni di moti turbolenti nell'atmosfera. Si cominciavano ad usare elaboratori elettronici i quali lavorano in aritmetica finita, troncando i valori numerici durante i calcoli. Lorenz si accorse che, trascurando le cifre troncate dall'elaboratore nelle condizioni iniziali utilizzate per una nuova propagazione, si arrivava a risultati drasticamente diversi: i moti erano impredicibili. I fenomeni caotici nel Sistema Solare sono ben visibili, l'intero Sistema Solare può considerarsi caotico su tempi scala lunghi, non si possono infatti fare previsioni attendibili oltre i 100 milioni di anni. Ci sono inoltre dei meccanismi, come le collisioni, gli incontri ravvicinati, le risonanze e l'effetto Yarkovsky, che amplificano il caos e che sono particolarmente importanti per capire la dinamica e l'origine degli asteroidi potenzialmente pericolosi.

Impact monitoring

Quando un asteroide viene scoperto, come abbiamo già evidenziato, non si sa niente circa l'orbita reale dell'oggetto. Vi è un insieme di possibili orbite, tutte compatibili con le osservazioni, che formano una regione di confidenza nello spazio delle orbite (tale spazio ha dimensione 6, servono infatti sei numeri per individuare univocamente posizione e velocità dell'oggetto). Possiamo descrivere questo fatto pensando ad uno sciame di asteroidi virtuali (*VAs, Virtual Asteroids*), con orbite diverse, ma molto vicine, e tutte compatibili con le osservazioni. La verità dell'asteroide è divisa tra tutti quelli virtuali, nel senso che solo uno è reale, ma non si sa quale. Per rendere le cose semplici è possibile pensare che tutti gli asteroidi virtuali abbiano la stessa probabilità di essere quello reale, ma in realtà si utilizza una distribuzione di probabilità più complicata (Gaussiana). Poiché la regione di confidenza contiene un continuo di orbite, ogni asteroide virtuale è il rappresentante di una piccola porzione di spazio. C'è da notare che l'orbita nominale, soluzione del fit ai minimi quadrati dei residui osservativi, è solo uno dei tanti asteroidi virtuali, senza nessun altro specifico significato. Nel caso che un asteroide sia Earth-crossing, è possibile che esistano uno, o più asteroidi virtuali associati ad esso, per i quali è ammissibile una collisione. Quindi può esistere una piccola regione connessa piena di orbite collisionali, la quale definisce un impattore virtuale (*VI, Virtual Impactor*). Lo scopo dell'impact monitoring è individuare impattori virtuali ed assegnare a ciascuno una probabilità d'impatto. Per raggiungere lo scopo dobbiamo prendere ciascun asteroide virtuale e propagare la sua orbita nel futuro (di solito 100 anni) registrando eventuali incontri ravvicinati e impatti con il nostro pianeta. Per la propagazione dobbiamo naturalmente campionare con un numero finito di VAs la regione di confidenza. Questo viene fatto utilizzando un sottospazio unidimensionale dello spazio degli elementi orbitali (una curva) che chiamiamo Linea Delle Variazioni (LOV, Line Of Variations). Su questa curva vengono presi un certo numero di punti che rappresentano l'insieme dei VAs da propagare. Per la ricerca di impattori è necessario poi utilizzare un piano bersaglio, un piano passante per il centro della Terra e perpendicolare alla velocità relativa imperturbata dell'asteroide, sul quale viene segnata la sezione della Terra e l'intersezione con le orbite dei VAs. Se un asteroide virtuale si trova dentro la sezione della Terra siamo in presenza di un impattore virtuale e possiamo procedere al calcolo della probabilità utilizzando una proiezione della regione di confidenza 6-dimensionale sul piano bersaglio che rappresenta l'incertezza associata all'impattore virtuale. Gli algoritmi qui descritti sono implementati in un software chiamato CLOMON2 (la prima versione CLOMON risale al 1998), creato dal Gruppo di Meccanica Celeste dell'Università di Pisa, che dal 2002 si occupa di calcolare orbite e probabilità d'impatto degli asteroidi potenzialmente pericolosi: gli output sono riassunti in una Risk Page pubblicata sul sito web NEODyS. Un sistema analogo, Sentinel, si trova al Jet Propulsion Laboratory (JPL) di Pasadena, California. I due gruppi di ricerca (UniPI e JPL) sono in continuo contatto per la verifica ed il confronto dei risultati.

Se dovesse capitare di trovare una probabilità d'impatto uguale a 1, cosa si fa? I fattori da prendere in considerazione sono essenzialmente due: dimensioni dell'oggetto e tempo rimanente all'impatto. E' chiaro che, maggiore è il tempo all'impatto, più possibilità si hanno di trovare una soluzione, che potrebbe anche consistere nell'organizzare una missione spaziale per la deflessione dell'asteroide. Se l'impatto è imminente (pochi giorni o addirittura poche ore) possiamo fare poco, ma gli oggetti in questi casi sono piccoli e spesso si sgretolano all'ingresso in atmosfera. Ad ogni modo il "cosa fare in caso di previsione di impatto" è un argomento molto complesso e ancora estremamente dibattuto sia a livello scientifico che politico.

Per la versione estesa

https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days

dott. Giacomo Tommei
Ricercatore presso il Dipartimento di Matematica

Esercizi

Esercizi tratti da gare delle Olimpiadi di Matematica.

Per altri esercizi consultare il sito *olimpiadi.dm.unibo.it*.

N.B.: Ogni esercizio è contrassegnato da alcune stelline (da 1 a 3) che ne indicano la difficoltà.

1. ($\star$) In quanti modi distinti posso disegnare la figura 1 partendo da P, senza mai staccare la penna dal foglio e senza passare più di una volta da nessun punto eccettuato il vertice comune ai tre triangoli?

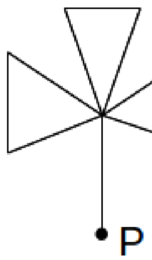


Figura 1

(A) $2^4 \cdot 3$ (B) $2^3 \cdot 3$ (C) 2^4 (D) $2^2 \cdot 3^3$ (E) 3^3

2. ($\star$) Una moneta d'oro è circondata da quattro monete d'argento uguali tra loro. Ogni moneta d'argento è tangente alla moneta d'oro e a due monete d'argento. Qual è il rapporto tra il raggio della moneta d'oro e quello delle monete d'argento?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\sqrt{2}-1$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) 1

3. ($\star$) Una pulce si trova sul numero 12 del quadrante di un orologio. Sceglie un numero naturale n compreso tra 1 e 12, estremi inclusi, e comincia a fare salti di n numeri sul quadrante, in senso orario (ad esempio, se $n = 3$, dopo il primo salto è sul 3, dopo il secondo salto è sul 6, e così via). Dopo 12 salti, per la prima volta si ritrova sul numero 12 del quadrante. In quanti modi distinti può aver scelto n?
   (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 12

4. ($\star\star$) La casa di Dante si trova nel punto D ai piedi di una montagna conica con diametro di base di 4 km e cima nel punto C. Si sa che D dista da C 4 km in linea retta e che, detto P il punto diametralmente opposto a D rispetto alla base della montagna, la porta dell'Inferno si trova a 3/4 del segmento CP, più vicino a P. Quale distanza, in km, deve percorrere Dante al minimo (camminando sulle pendici della montagna) per poter raggiungere la porta dell'Inferno da casa sua?

   (A) $\pi + 1$ (B) 5 (C) 2π (D) 7 (E) $2\pi + 1$

5. ($\star\star\star$) Ogni numero naturale, zero incluso, è colorato di bianco o di rosso, in modo che:

   - vi siano almeno un numero bianco e un numero rosso;
   - la somma tra un numero rosso ed un numero bianco sia un numero bianco;
   - il prodotto tra un numero bianco ed un numero rosso sia un numero rosso.

Dimostrare che il prodotto di due numeri rossi è sempre un numero rosso e che la somma di due numeri rossi è sempre un numero rosso.

6. ($\star\star$) Concetta immagina un mondo piatto e tondo, e lo divide in sette stati, uno centrale e gli altri sei intorno a questo, come indicato in figura 2. Assegna a ciascuno stato una lettera come nome. Vuole colorare ciascuno stato di rosso, oppure di verde, oppure di giallo, in modo che due stati confinanti non abbiano lo stesso colore. In quanti modi diversi può farlo?

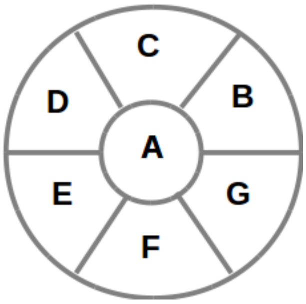


Figura 2

(A) Nessuno (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

7. ($\star$) Ad un tavolo ci sono quattro persone: Luca, Maria, Nicola e Paola. Ognuno dei quattro mente sempre, oppure non mente mai. Inoltre non amano parlare di loro stessi ma piuttosto dei loro amici; tant'è che quando viene chiesto loro chi mente sempre, le loro risposte sono:
Luca: *"ogni ragazza è sempre sincera"*
Maria: *"ogni ragazzo è sempre bugiardo"*

Nicola: *"c'è una ragazza che mente sempre, l'altra è sempre sincera"*
Paola: *"uno dei ragazzi è sempre sincero, l'altro mai"*.
Sapreste dire quanti al tavolo sono sempre sinceri?

(A) Nessuno (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) tutti

8. ($\star\star$) Ker disegna lo stemma della sua città, Mathlandia, su un foglio a quadretti con quadretti di lato 1, ottenendo la figura 3. Sapendo che i tratti curvi sono tutti formati da semicirconferenze, quanto misura l'area colorata di grigio?

(A) 12π (B) $8\pi + 2$ (C) 12 (D) 8 (E) $12 - \pi$

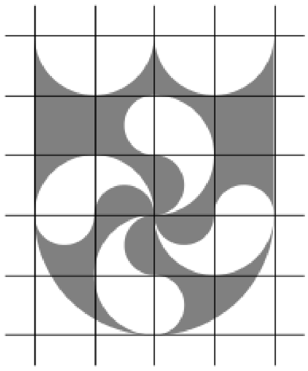


Figura 3

9. ($\star\star\star$) Si svolge un torneo di calcio balilla tra matematici e fisici (costituito da un certo numero di partite) in cui vince la squadra che segna il maggior numero di goal totali. In ogni partita i fisici segnano 2 goal in più di quanti ne avevano segnati nella partita precedente, a partire da un goal della prima partita. Sapendo che il numero totale

dei goal segnati durante il torneo da matematici e fisici è 330 e che sono i matematici ad aggiudicarsi la vittoria nel torneo, determinare lo scarto minimo di goal che può essersi verificato.

(A) 1 (B) 2 (C) 24 (D) 42 (E) 48

Esercizi tratti da *Il Fibonacci*

Il Fibonacci è una raccolta di nove "poster" creati dal 1990 al 2004 dal professor Franco Conti, talvolta insieme ad alcuni collaboratori, in occasione della finale nazionale delle Olimpiadi di Matematica a Cesenatico. Ciascun foglio de "Il Fibonacci" (dal numero 0 al numero 8) racchiude problemi, curiosità matematiche, idee, aneddoti e si propone di stimolare la curiosità su aspetti insoliti della matematica. Nel 2011 tutti i numeri del Fibonacci sono stati raccolti in un volume, curato dall'UMI (vedi la bibliografia a pagina 39).

N.B.: Ogni esercizio è contrassegnato da alcune stelline (da 1 a 3) che ne indicano la difficoltà.

1. ($\star\star$) **UNA FRASE UN PO' AMBIGUA**:
   Supponiamo di trovare, spulciando su una vecchia grammatica italiana, la seguente frase, elencata tra gli esercizi:

   Cuesta proposizzione ha 3 errori.

   Quanti errori contiene questa frase?

2. ($\star$) **L'INDOVINELLO DI DIOFANTO**:
   Diofanto di Alessandria viene spesso chiamato padre dell'algebra anche se tale appelltivo non deve essere preso alla

lettera. Ben poco si sa della sua vita se non che visse attorno al 250 a.C. Si sa però a quanti anni morì, perché in una raccolta di problemi del V secolo nota come *Antologia greca*, la sua vita viene descritta dal seguente indovinello:

> Diofanto rimase fanciullo per un sesto della sua vita; dopo un altro dodicesimo gli spuntò la barba e passato un altro settimo egli si sposò. Dopo cinque anni dal matrimonio ebbe un figlio, il quale fu sfortunato e visse la metà degli anni di suo padre. Dopo quattro intensi anni dalla morte del figlio, dedicati allo studio della matematica, Diofanto morì.

Quanti anni visse Diofanto?

3. ($\star$) **TUTTI I NUMERI SONO UGUALI**
Dati due numeri diversi a e b, sia c la loro media aritmetica, dunque

$$a + b = 2c;$$

moltiplicando per $(a - b)$, si ha

$$(a + b)(a - b) = 2c(a - b);$$

ossia

$$a^2 - b^2 = 2c(a - b), \qquad a^2 - 2ac = b^2 - 2bc;$$

da cui, sommando c^2 ad entrambi i membri dell'uguaglianza,

$$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2;$$

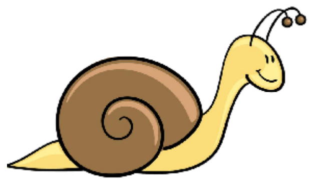
che equivale a

$$(a - c)^2 = (b - c)^2;$$

e quindi $a = b$. Allora tutti i numeri sono uguali!

Dov'è l'imbroglio?

4. ($\star\star\star$) **CHI VA PIANO** Una chiocciola, lenta ma cocciuta, parte da un'estremità di un nastro di gomma lungo 1 metro e avanza verso l'altra estremità alla velocità di 10 cm/minuto. Ad ogni minuto, però, uno spirito maligno allunga il nastro di 1 metro. Così alla fine del primo minuto la chiocciola è a 10 cm da punto di partenza e a 90 cm dal punto di arrivo, ma, siccome il nastro viene allungato, all'inizio del secondo minuto si trova a 20 cm dalla partenza ed a 180 cm dal traguardo. Alla fine del secondo minuto ha percorso altri 10 cm ed è a 30 cm dalla partenza ed a 170 cm dall'arrivo; ma il nastro si allunga nuovamente e tali distanze diventano 45 e 255 cm...



Riuscirà mai la chiocciola a raggiungere la meta? (Ovviamente si suppone che il nastro possa allungarsi all'infinito e che infinite siano sia la longevità della chiocciola che la perversità dello spirito maligno).

5. ($\star\star$) Data una corona circolare, dimostrare che la sua area è uguale a quella di un cerchio il cui diametro è una corda del cerchio maggiore della corona, tangente al cerchio minore.

6. ($\star$) Tra le seguenti affermazioni tre sono vere ed una è falsa:

    - Marco è più anziano di Serena;
    - Clementina è più giovane di Serena;
    - La somma delle età di Serena e di Clementina è il doppio dell'età di Marco;
    - Clementina è più anziana di Marco.

    Chi è il più giovane e chi è il più anziano?

7. ($\star\star\star$) Determinare tutti i triangoli rettangoli che hanno i lati di lunghezza intera e tali che la loro area sia espressa da un numero uguale al doppio del perimetro.

Qualche altro esercizio ...

1. - Consideriamo 7 punti nel piano, con la proprietà che ogni retta che passa per due di tali punti ne incontra anche almeno un altro. Dimostrare che i 7 punti sono allineati.

    - In generale, se consideriamo n punti nel piano ($v \geq 3$) che soddisfano la stessa proprietà si può concludere che sono allineati?

2. In una isoletta, la cui forma è un triangolo equilatero con lato lungo 24 metri, si vogliono piantare degli alberelli, con la condizione che distino almeno 8 metri l'uno dall'altro. Qual è il numero massimo di alberelli che è possibile piantare?
    Nota: gli alberelli non si possono piantare sul bordo dell'isola.

Per suggerimenti e/o soluzioni, consultate la pagina web dell'orientamento dedicata al giornalino

http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days

o scriveteci all'indirizzo e-mail *counseling.dm.unipi@gmail.com*

Giochi

Vi presentiamo due giochi adatti per interessanti sfide con gli amici. Naturalmente dietro alla migliore strategia per ogni gioco, è nascosta un po' di matematica e le nostre domande vi aiuteranno a scoprirla ...

Nim

È un gioco a due giocatori, con le seguenti regole. Ci sono alcuni piatti con dei biscotti (per esempio, nella Figura 4, ci sono quattro piatti con, rispettivamente, 2, 6, 9 e 12 biscotti).

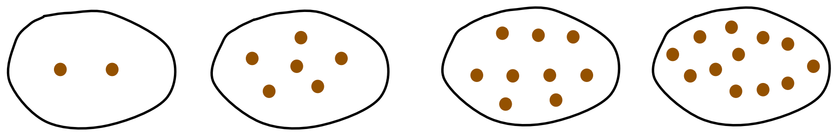


Figura 4

Ogni giocatore, al suo turno, sceglie un piatto che non è vuoto, e mangia da quel piatto quanti biscotti vuole (come minimo un biscotto). Poi tocca all'altro giocatore e così via... Vince chi riesce a finire i biscotti, ossia chi, dopo la sua mossa, lascia tutti i piatti vuoti. Provate a giocare la partita la cui situazione iniziale è quella in figura.

Sapreste dire se in tale partita il primo giocatore ha una strategia vincente?

E se i piatti fossero solo due, uno con 10 biscotti e uno con 15 biscotti, vorreste essere il primo giocatore o il secondo giocatore? E cosa succede se i piatti sono due, uno con n biscotti e uno con m biscotti?

Germogli

Anche Germogli è un gioco a due giocatori. Una partita comincia con un foglio sul quale sono disegnati alcuni cerchietti (per esempio la partita rappresentata nella Figura 5 comincia con tre cerchietti).

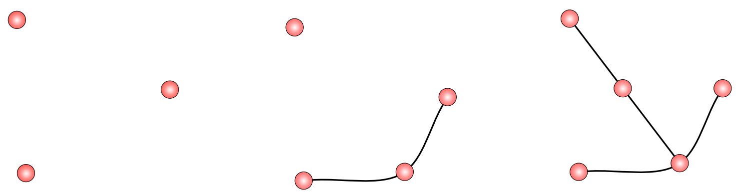


Figura 5: la configurazione iniziale e le prime due mosse di una partita a Germogli.

Ogni mossa consiste nel collegare due cerchietti con un arco continuo (i due cerchietti possono anche essere lo stesso, ossia sono ammessi 'lacci' che partono da un cerchietti e vi ritornano), e nel disegnare un nuovo cerchietti lungo il nuovo arco. La regola è che gli archi tracciati non devono mai intersecarsi, e che da nessun cerchietti, a nessuno stadio del gioco, possono uscire più di tre archi (vedi Figure 5 e 6). Perde il giocatore che, quando è il suo turno, scopre che non ha più nessuna mossa valida da fare.

Provate a giocare delle partite a Germogli, partendo con 3, 4, oppure 5 cerchietti.

In quali di questi casi, secondo voi, il primo giocatore ha una strategia vincente?

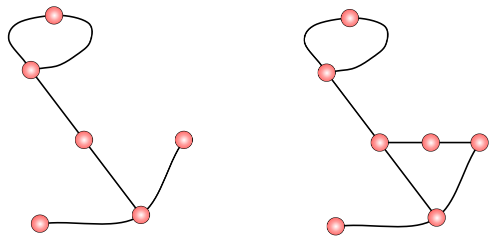


Figura 6: La terza e la quarta mossa della partita iniziata in Figura 5; osserviamo che nella terza mossa il giocatore disegna un laccio che parte da un vertice e vi ritorna.

Libri consigliati

Vi presentiamo una lista di libri consigliati. Molti di noi si sono appassionati alla matematica anche grazie a queste letture!

- J.D. Barrow, *Perché il mondo è matematico?*, Laterza: come la scienza più astratta riesce a spiegare i fenomeni concreti con efficacia ineguagliabile;

- F. Berto,*Logica da zero a Gödel*, Laterza: introduzione alla logica (matematica e filosofica);

- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica;

- E. Delucchi, G. Gaiffi, L. Pernazza, *Giochi e percorsi matematici*, Springer: a partire da vari giochi, gli autori approfondiscono alcuni argomenti di matematica come i grafi, la topologia e la combinatoria;

- A. Doxiadis, *Zio Petros e la Congettura di Goldbach*, Bompiani: racconto di una vita matematica impiegata per inseguire un obiettivo sfuggente;

- M. du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni della ricerca dei numeri primi;

- G. Filocamo, *Mai più paura della matematica*, Feltrinelli: viaggio nella matematica divulgativa, da questioni elementari a matematica avanzata (grafi, topologia, geometrie non euclidee, un po' di nodi), passando per un po' di logica, calcolo delle probabilità e analisi; il tutto presentato in modo elementare ed interattivo, con esercizi (risolti), disegni e curiosità;

- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico;

- E. Giusti, *La matematica in cucina*, Bollati Boringhieri: nel libro vengono spiegati fenomeni della vita reale (per lo più domestica) dal punto di vista matematico. Il linguaggio è colloquiale perché è un giovane matematico che spiega ad un amico; il libro propone comunque anche definizioni e spiegazioni puntuali e con qualche conto;

- D. Guedj, *IL teorema del pappagallo*, Longanesi: un interessante romanzo con leggere digressioni di divulgazione matematica;

- G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del matematico primitivo Ramanujan;

- O. A. Ivanov, *Facile come pi greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore;

- E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UMI: raccolta dei poster a cura di Franco Conti;

- A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso;

- R. Zanasi, *Verso l'infinito ma con calma - Un dialogo su matematica, insiemi e numeri*, Scienza Express: un percorso guidato verso gli insiemi infiniti.

Link utili

Per finire, un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- Versione on-line del giornalino:
  https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days
- Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa:
  http://www.dm.unipi.it/webnew/
- Sito dell'Università di Pisa:
  http://www.unipi.it/
- Sito delle olimpiadi di matematica:
  http://olimpiadi.dm.unibo.it/
- Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa:
  http://www.sns.it/
- Sito degli studenti di matematica di Pisa:
  http://poisson.dm.unipi.it/