n° 1

Pisa, 21-25 Settembre 2015

Matematica

il giornalino degli OpenDays

...notizie, giochi e pillole di matematica

IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Su indicazione della Commissione Orientamento.
Realizzazione a cura degli studenti Counseling 2015:

Agnese Barbensi
Arianna Santini
Dario Villanis Ziani

Coordinamento: Prof. Giovanni Gaiffi

Per informazioni:
counseling.dm.unipi@gmail.com

Introduzione

Questo giornalino nasce in occasione degli eventi di orientamento organizzati dall'Università di Pisa.

Come il primo numero, che potete consultare all'indirizzo https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days, anche questo secondo numero del giornalino è stato realizzato da studenti del Corso di Laurea in Matematica e vuole essere una piccola guida per condurvi all'interno del mondo matematico universitario, proponendo argomenti e spunti di riflessione.

Nella prima parte di questo libretto troverete una breve introduzione al corso di laurea in Matematica, con qualche esempio pratico di possibili percorsi di studio. A seguire vi verrà presentato un breve articolo di carattere divulgativo intitolato *Nodi e colorazioni*, nel quale potrete trovare un piccolo assaggio della cosiddetta Teoria dei Nodi. Infine vi proporremo alcuni esercizi e un gioco. Di questo gioco, l'Hex, che ha addirittura due inventori (Piet Hein e John Nash), vi racconteremo la storia e vi metteremo sulle tracce del profondo significato matematico che nasconde.

Indice

Il Corso di Laurea in Matematica **3**

Nodi e Colorazioni **6**

Esercizi **16**

Un gioco e la sua storia: l'Hex **22**

Prossimi eventi **28**

Il Corso di Laurea in Matematica

Il Corso di Laurea in Matematica è essenzialmente suddiviso in due parti: un Corso di Laurea Triennale, in cui vi verrà fornita una preparazione di base, ed al termine del quale conseguirete un primo titolo; ed un Corso di Laurea Magistrale, della durata di due ulteriori anni, che vi fornirà l'opportunità di ampliare le vostre conoscenze, approfondendo il settore che più vi piace. Sebbene il biennio magistrale sia una naturale prosecuzione dei primi tre anni, potrete anche decidere di terminare i vostri studi dopo la sola triennale, o eventualmente migrare verso altri corsi magistrali affini. Nel caso in cui conseguiate anche il titolo Magistrale, avrete l'opportunità di accedere al mondo della ricerca mediante un Dottorato di Ricerca.
All'interno del percorso della Laurea Triennale avrete la possibilità di scegliere tra due possibili curriculum, uno fondamentale ed uno computazionale; il primo è volto ad approfondire le discipline più astratte, mentre il secondo è caratterizzato da un aspetto più applicativo e modellistico. Poichè come già detto il corso triennale vuole fornire una preparazione di base, molti esami sono in comune ai due curriculum ed obbligatori per tutti (in particolare gli esami dei primi due anni); in ogni caso al termine del percorso triennale, qualunque curriculum sia stato scelto, potrete accedere liberamente ad ogni percorso di studi che il Corso di Laurea Magistrale offre.
Illustriamo dunque concretamente alcuni possibili percorsi di studi relativi al primo triennio, individuando prima gli esami in comune e poi le possibili scelte.

- Al primo anno, in comune ai due curriculum, affronterete gli esami annuali di Analisi e di Geometria, oltre ai corsi semestrali di Fondamenti di Programmazione con Laboratorio, Fisica 1 e Aritmetica e ad un Laboratorio di Comunicazione mediante Calcolatore.

- Anche il secondo anno prevede poca diversificazione: avrete ancora un esame annuale di Analisi ed uno di Geometria, ed i corsi semestrali di Algebra 1, Analisi Numerica con Laboratorio, Elementi di Probabilità e Statistica oltre ad un corso di Inglese Scientifico e ad un Laboratorio Didattico di Matematica Computazionale; inoltre coloro che avranno scelto il curriculum computazionale affronteranno un esame di Algoritmi e Strutture Dati, mentre chi avrà preferito il curriculum fondamentale avrà un esame a scelta, per esempio Elementi di Teoria degli Insiemi o Algebra 2.

- Al terzo anno si avverte maggiormente la diversificazione tra i due curriculum, dal momento che l'unico esame in comune è Sistemi Dinamici; per il resto, il curriculum fondamentale prevede Fisica 2, Fisica 3 con Laboratorio, un Laboratorio Sperimentale di Matematica Computazionale e quattro esami a scelta, che vengono spesso selezionati tra i corsi più teorici, come, a puro titolo di esempio, Logica Matematica, Geometria e Topologia Differenziale, Elementi di Geometria Algebrica, Gruppi e Rappresentazioni; invece all'interno del curriculum computazionale sono inseriti gli esami di Calcolo Scientifico, Linguaggi di Programmazione con Laboratorio, Ricerca Operativa, un Laboratorio Computazionale e tre esami a scelta, come ad esempio Statistica Matematica, Elementi di Meccanica Celeste, Finanza Matematica.

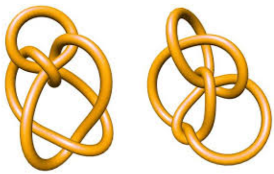
Per quanto riguarda il Corso di Laurea Magistrale, esso sostanzialmente si differenzia in un percorso teorico, uno applicativo, uno modellistico ed uno didattico. I primi tre costituiscono una preparazione ideale verso la ricerca matematica sia astratta sia volta alle applicazioni in svariati campi; il curriculum didattico, di recentissima attivazione, offre agli studenti interessati un valido percorso volto all'insegnamento scolastico o alla preparazione alla ricerca nel campo della didattica e della storia della matematica. Come si può notare, praticamente ogni interesse di specializzazione può trovare un riscontro nell'offerta formativa del Corso di Laurea Magistrale in Matematica a Pisa.

Sbocchi lavorativi

Un'opinione diffusa sulle possibilità lavorative di un laureato in Matematica è che esse si limitino all'insegnamento e alla carriera accademica. Sebbene questi siano senza dubbio possibili sbocchi, molti altri sono i campi in cui un matematico può far valere la sua figura professionale, sia per la preparazione che per la grande adattabilità a molti ambiti lavorativi, derivanti da un tipo di formazione che differisce da quella offerta da altri corsi di laurea. In particolare, le opzioni lavorative spaziano dalla finanza, alla statistica, alla meccanica celeste fino a sismologia, meteorologia, editoria e molto altro ancora. Sebbene altri laureati possano aver dedicato esplicitamente la maggior parte dei loro studi a tali settori, molto spesso le capacità di astrazione e di risoluzione dei problemi di un matematico riescono a porlo in una posizione molto appetibile dal punto di vista lavorativo. In generale comunque le prospettive occupazionali sono buone, come mostrano alcuni dati statistici che sono stati inseriti nel precedente numero di questo giornalino e che potete consultare online all'indirizzo https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days.

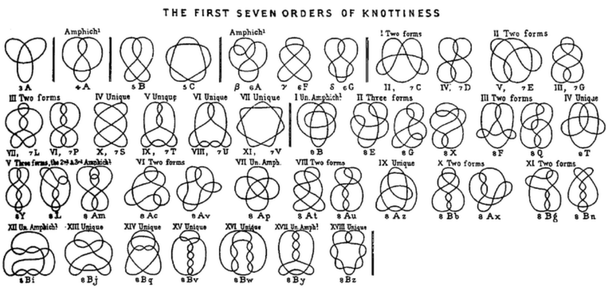
Nodi e Colorazioni

Sapreste dire quali dei lacci in figura sono annodati e quali sono sciolti?



Come ci ricordano certi rompicapo con le corde o alcuni trucchi da mago, la risposta non è sempre ovvia. La *Teoria dei Nodi* è la branca della matematica che si propone di rispondere a quesiti come questo.

Nella seconda metà del 1800 il fisico P.G. Tait, motivato dalla teoria di Lord Kelvin secondo la quale gli atomi sarebbero stati vortici annodati nell'etere, cercò di creare una classificazione completa dei nodi, ordinati per complicazione crescente: la prima *tavola di nodi*.



Sebbene pochi anni dopo la teoria di Lord Kelvin sia stata confutata, il tentativo di Tait motivò i matematici a chiedersi come fosse possibile distinguere tra di loro due nodi non equivalenti, cioè due nodi per cui l'unico modo di trasformare l'uno nell'altro sia tagliare il laccio. La Teoria dei nodi divenne un argomento molto studiato all'interno della nascente branca della matematica, la *Topologia*.

La Teoria dei Nodi è ad oggi un settore di ricerca molto attivo. Oltre all'enorme interesse teorico, ha moltissime applicazioni, che spaziano dalla Fisica Teorica alla Biologia. Dagli anni '90 è stata applicata allo studio del DNA (*acido desossiribonucleico*).

Infatti, la struttura a doppia elica del DNA risulta a volte ulteriormente annodata.

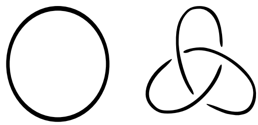
Un enzima detto *Topoisomerasi* snoda le strisce durante i processi di trascrizione e duplicazione. Le conoscenze provenienti dalla Teoria dei Nodi aiutano i biologi a comprendere meglio questi processi di snodamento, dando ad esempio delle stime sul tempo che occorre agli enzimi per completare i loro compiti.

Ma che cos'è un *nodo* in Matematica?

Definizione. *Un nodo è una curva chiusa, intrecciata nello spazio.*
Due nodi sono equivalenti *(cioè sono lo stesso nodo) se è possibile deformare l'uno nell'altro nello spazio con continuità (in altre parole, senza creare autointersezioni e senza* tagliare *il laccio).*

Dire che un nodo è equivalente al nodo *banale* (cioè quello sciolto) vuol dire che è possibile scioglierlo senza creare autointersezioni e tagliare il laccio.

I nodi vengono rappresentati attraverso i loro *diagrammi*, cioè il disegno che si ottiene proiettandoli su un piano e segnalando graficamente i sottopassaggi ad ogni incrocio. In figura, a destra, un diagramma per il nodo Trifoglio, a sinistra uno per il nodo banale.



Come potete osservare usando una corda chiusa su se stessa (ad esempio un elastico), ci sono tantissimi (*infiniti!*) diagrammi diversi che rappresentano lo stesso nodo!

Nel 1927 il matematico Kurt Reidemeister ha dimostrato che due diagrammi rappresentano lo stesso nodo se e solo se è possibile ottenere l'uno dall'altro tramite una sequenza finita delle tre mosse in figura.

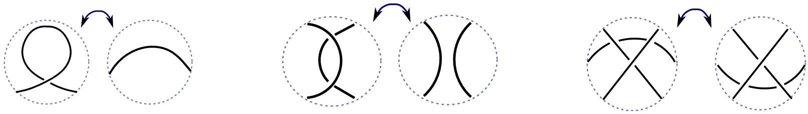


Figura 1: Ognuna delle tre mosse consiste nel lasciare invariato il diagramma fuori dal cerchio, e sostituire la parte interna al cerchio con la figura corrispondente.

Questo risultato, seppur di fondamentale importanza, non è sufficiente per capire se un nodo è banale, o se due diagrammi effettivamente rappresentano lo stesso nodo! Infatti, sebbene

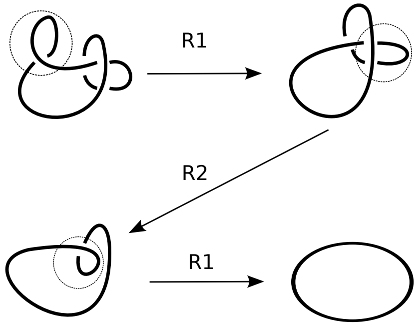


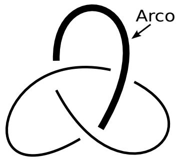
Figura 2: Un esempio: il diagramma rappresenta il nodo banale. Possiamo infatti scioglierlo con una sequenza di 3 mosse di Reidemeister.

si sappia che diagrammi equivalenti differiscono per un numero finito di mosse di Reidemeister, il teorema non dice niente su quante, e soprattutto quali, mosse servano.

Queste considerazioni hanno portato i matematici a cercare altri modi per distinguere i nodi tra di loro. Nella pagine successive introdurremo uno strumento semplice ma funzionale allo scopo.
Ad esempio saremo in grado di dimostrare che il nodo trifoglio non è banale.

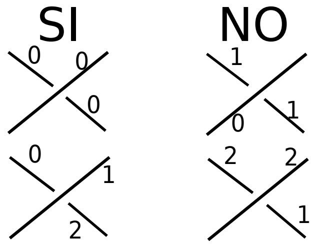
Diagrammi e Colorazioni

Un *arco* di un diagramma è una porzione della proiezione del nodo delimitata da due *sottopassaggi:*



Scegliete i vostri 3 colori preferiti; con *colorazione* di un diagramma intendiamo l'assegnazione di un colore ad ogni arco, in modo che ad ogni incrocio valga questa regola:

- tutti gli archi hanno lo stesso colore, **oppure**
- tutti gli archi hanno colori diversi.



Per motivi grafici indicheremo i colori con delle etichette agli archi date dai numeri $0, 1$ e 2.

La colorazione ottenuta assegnando a tutti gli archi lo stesso colore è detta *banale*. Ogni diagramma ammette ovviamente almeno le 3 colorazioni banali.
Un diagramma si dice 3-*colorabile* se ammette una colorazione non banale. Il diagramma del nodo banale nella terza figura non è 3-*colorabile*.

Il motivo per cui questa costruzione è interessante sta nel seguente risultato dovuto a Ralph H. Fox nel 1961:

Teorema. *Diagrammi di nodi equivalenti ammettono lo stesso numero di 3-colorazioni.*

Questo in particolare ci dice che se un nodo ammette un diagramma 3-*colorabile*, questo non può essere equivalente al nodo banale.

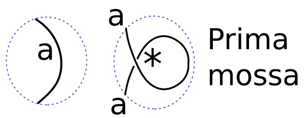
Il numero di 3-colorazioni è un esempio semplice di quelli che in matematica vengono chiamati *invarianti* di nodi, ossia oggetti (numeri, polinomi etc) associati ai diagrammi, che sono uguali per diagrammi che rappresentano lo stesso nodo.

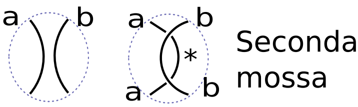
Dimostrazione. Grazie al Teorema di Reidemeister sappiamo che due diagrammi rappresentano lo stesso nodo se e solo se differiscono per sequenze di mosse dei tre tipi di cui sopra.
Per dimostrare il Teorema di Fox basterà allora verificare la tesi per diagrammi che differiscono per una delle tre mosse.
Considereremo per ogni mossa di Reidemeister i due diagrammi L e L^* che coincidono ovunque fuori da un cerchio e differiscono per tale mossa all'interno, e mostreremo che esiste una bigezione tra le colorazioni di L e L^*, cioè una funzione iniettiva e surgettiva. In particolare il numero di colorazioni di L e L^* è lo stesso.

Dunque, ad ogni colorazione di L vogliamo associare una colorazione di L^*. Supponiamo quindi assegnata una colorazione di L. Siccome L e L^* coincidono fuori dai cerchi, possiamo costruire la colorazione corrispondente per L^* mantenendo i colori assegnati agli archi di L fuori dal disco, provando poi (se possibile) a estenderla in modo coerente nella parte in cui i diagrammi differiscono.

Vediamo il primo caso: per ogni scelta di colore $a \in \{0, 1, 2\}$ da dare all'arco del diagramma L ne abbiamo una sola in L^* che rispetti la regola all'incrocio (si veda la figura seguente).

Nel secondo, scegliamo una colorazione di L. Questa sarà data (all'interno del cerchio) da due colori $a, b \in \{0, 1, 2\}$.

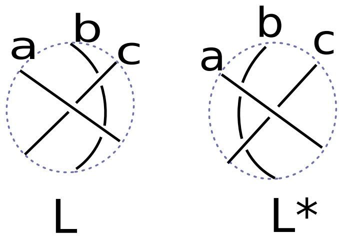




Se $a = b$, l'unico modo di completare la colorazione in L^* è porre $* = a = b$.
Analogamente, se $a \neq b$, l'unico modo di completare la colorazione in L^* è porre $* = c$, dove $c \in \{0, 1, 2\}$ è l'unico dei tre colori diverso sia da a che da b.
In ognuna delle situazioni abbiamo la bigezione cercata.

Il caso della terza mossa è ugualmente semplice, ma necessita di diversi passaggi.

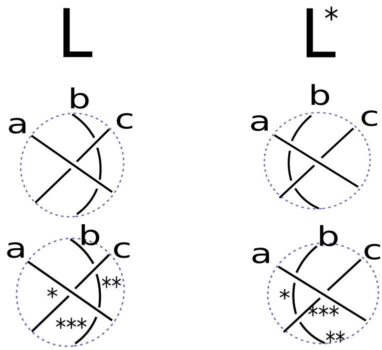
Supponiamo che ai capi degli archi siano assegnati i colori a, b e c in L. In L^* dovrò allora avere la stessa situazione, come in figura.



Se $a = b = c$, sia in L che in L^* posso estendere le colorazioni dentro ai dischi solo nel modo banale, cioè colorando tutti gli archi con lo stesso colore.

Supponiamo adesso che a, b, c siano a due a due distinti, e guardiamo L. Dato che $b \neq c$, per completare la colorazione necessariamente dovrò porre $** = a$.

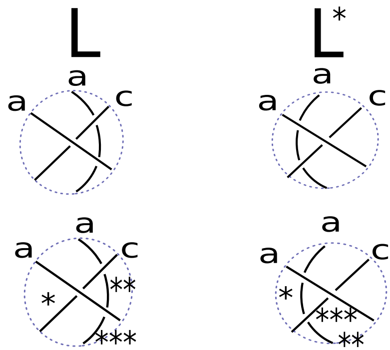
Analogamente, da $a \neq c$ ottengo $* = b$. L'unica scelta possibile per completare rimane assegnare $*** = a$.
Con lo stesso ragionamento applicato ad L^* vediamo che anche in questo caso ho un unico modo di estendere la colorazione,



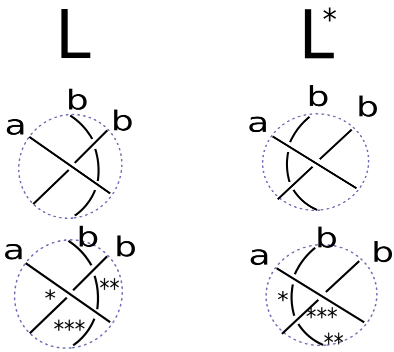
ottenuto ponendo $* = c$, $*** = b$ e $** = a$.

Rimangono adesso da verificare i casi in cui due dei colori sono uguali, e il terzo è distinto.

Supponiamo adesso che i primi due archi siano colorati uguali, e il terzo sia diverso, come in figura.



In L siamo obbligati a porre $** = b = *$, e quindi necessariamente $*** = c$. Allo stesso modo, in L^*, l'unico modo di rispettare la regola è imporre $* = a$ e $*** = b$, da cui $** = c$.



Se è il primo arco ad essere distinto dagli altri due, la situazione è simile:

In L dobbiamo infatti necessariamente avere $** = b$ e $* = c$, da cui $* * * = c$. Analogamente, in L^*, dobbiamo necessariamente porre $* = c = * * *$ da cui $** = c$.

Lasciamo per esercizio la (facile) verifica dell'ultimo caso, quello in cui sono il primo e il terzo arco ad avere lo stesso colore.

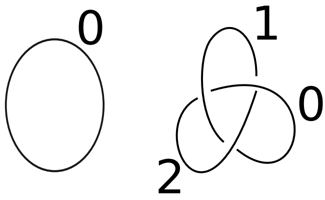
Abbiamo quindi mostrato che, se due diagrammi corrispondono allo stesso nodo (sono equivalenti), ogni 3-colorazione di L corrisponde esattamente a una di L^* (la bigezione cercata!), quindi il numero totale di colorazioni possibili è lo stesso per i due diagrammi, e il teorema è dimostrato.

$\square$

Come possiamo facilmente intuire, è impossibile trasformare un nodo trifoglio in un laccio snodato! Ma solo grazie al Teorema appena dimostrato, possiamo esserne matematicamente certi:

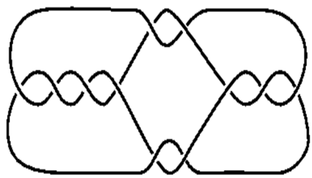
Corollario. *Il Nodo Trifoglio non è banale.*

Dimostrazione. Il nodo trifoglio ammette un diagramma 3-colorabile, e non può quindi essere equivalente al nodo banale.



$\square$

Non sempre la risposta giusta è quella intuitiva! Sapreste per esempio dire se il nodo in figura è banale? (Spoiler: la risposta è affermativa, ma le mosse di Reidemeister che lo sciolgono sono particolarmente difficili da trovare...)

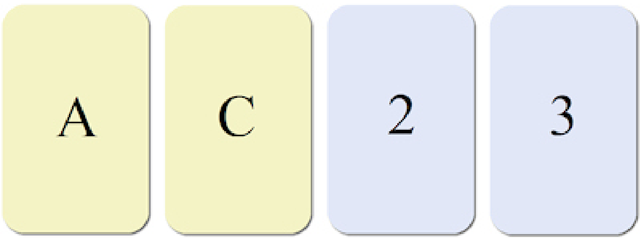


Agnese Barbensi
laureata triennale in Matematica

Esercizi

1. Dato un triangolo qualsiasi, dimostrare che esiste sempre un quadrato che abbia due vertici su uno dei lati del triangolo e gli altri due vertici sugli altri due lati del triangolo.

2. **Test di Wason.** Si consideri l'affermazione "Dietro una vocale c'è sempre un numero pari". Quali carte è necessario girare affinché possa essere verificata la veridicità o la falsità dell'affermazione?



3. "*Fra tutti gli insegnanti, solo quelli con un coniuge ricco possiedono un auto di lusso.*" Quale delle seguenti affermazioni è equivalente a quella data?

   (A) Se una persona possiede un'auto di lusso, allora essa è insegnante o ha un coniuge ricco.

   (B) Se un insegnante ha un coniuge ricco, allora possiede un'auto di lusso.

   (C) Se un insegnante possiede un'auto di lusso, allora ha un coniuge ricco.

   (D) Se una persona possiede un'auto di lusso, allora essa è insegnante e ha un coniuge ricco.

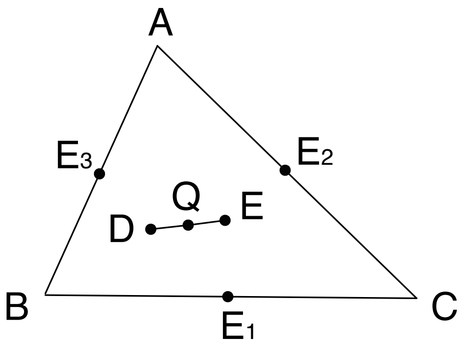
   (E) Se una persona ha un coniuge ricco, allora è un insegnante e possiede un'auto di lusso.

4. Sappiamo bene che la Terra è (circa) una sfera, ma nonostante questo il mondo a noi circostante ci appare come un piano. Supponiamo di essere approdati su un pianeta sconosciuto e di voler scoprire se ha la forma di una sfera o di un toro (attenzione: per i matematici il toro è una ciambella, dal latino *torus*!) ed immaginiamo di poter correre molto velocemente (come Flash... anche sull'acqua) e di poter lasciare una traccia indelebile del vostro passaggio. Quali osservazioni potrebbero convincerci di essere su un toro e non su una sfera?

5. Si consideri un triangolo con vertici A, B, C e siano D ed E due suoi punti interni tali che valgano le seguenti congruenze fra angoli:

$$EAB = DAC \quad EBA = DBC \quad ECA = DCB$$

Dimostrare che le proiezioni E_1, E_2, E_3 di E appartengono ad una circonferenza il cui centro è Q, il punto medio del segmento DE.



6. Esistono dei numeri naturali n tali che $5 \cdot 2^n$ può essere scritto come somma di due cubi di numeri positivi dispa-

ri? Se invece di $5 \cdot 2^n$ si considerasse $7 \cdot 2^n$ la risposta cambierebbe?

7. Dato un numero reale positivo a, dimostrare che, per ogni intero positivo n, almeno uno fra i numeri $a, 2a, 3a, \ldots, (n-1)a$ differisce da un intero per meno di $\frac{1}{n}$.

8. Supponiamo di scrivere un numero pari e poi applicare il seguente procedimento per dodici volte: al numero scritto sostituiamo il suo quadrato aumentato di cinque. Per quali cifre può terminare il numero trovato alla fine?

   (A) 0 oppure 4;

   (B) 0 oppure 6;

   (C) 0 oppure 4 oppure 6;

   (D) 4 oppure 6;

   (E) può terminare con qualsiasi cifra pari.

9. a e b sono due numeri non negativi. Sappiamo che $a^3+a < b - b^3$. In che modo i numeri a, b ed 1 sono ordinati?

   (A) $b < a < 1$;

   (B) $a < 1 < b$;

   (C) $a < b < 1$;

   (D) $1 < a < b$;

   (E) $a = b = 1$.

10. Questo esercizio propone di dimostrare una caratterizzazione delle terne pitagoriche primitive, ossia di provare una proprietà equivalente a quella che definisce una terna pitagorica primitiva. Ricordiamo che una terna pitagorica è una terna di numeri naturali (x, y, z) tali che

$x^2 + y^2 = z^2$ e che una terna pitagorica si dice primitiva se $\text{MCD}(x, y, z) = 1$.
Siano a, b, c tre numeri naturali tali che $\text{MCD}(a, b, c) = 1$. Dimostrare che questi tre numeri formano una terna pitagorica primitiva se e solo se esistono due numeri naturali (m, n) con diversa parità e con $\text{MCD}(m, n) = 1$ tali che

$$a = m^2 - n^2; \quad b = 2mn; \quad c = m^2 + n^2$$

11. Dimostrare che per ogni n intero positivo esistono almeno n numeri primi distinti che dividono il numero $2^{2^n} - 1$.

12. **L'enigma dei nanetti.** Vi proponiamo qui di risolvere una versione un po' più difficile del classico indovinello sui nanetti prigionieri dell'orco cattivo.
Non lo conoscete? Meglio! Avrete un gioco in più con cui confrontarvi.
L'indovinello classico è il seguente:

    Un certo numero (finito) di nanetti, diciamo n, sono stati fatti prigionieri da un terribile orco, il quale però si diverte a mettere alla prova le sue vittime, proponendo loro una possobilità di salvezza. Annuncia loro che il giorno successivo li disporrà in fila indiana e metterà loro un cappello in testa che potrà essere bianco o nero. Saranno disposti in modo che ciascuno veda soltanto i nanetti che ha davanti, e quindi il colore del loro cappelli, ma non il proprio. A partire dall'ultimo della fila, cioè il nano che vede tutti gli altri, ciascuno dovrà dire il colore del cappello che ha in testa, se indovinerà avrà salva la vita, altrimenti verrà divorato dall'orco.
    I nanetti non sanno quanti siano i cappelli bianchi e quanti i neri, ma avranno tutta la notte per accordarsi e trovare

una strategia in modo che se ne salvino il più possibile! Quanti nani riuscite a salvare? E come?

Spoiler: La strategia migliore ne salva con certezza $n-1$. Le cose si complicano però se l'orco decide di aumentare il colore dei cappelli! Supponiamo che siano un numero (finito) m di colori, e che i nani sappiano quanti e quali siano, pur non sapendo quanti cappelli ci sono di ciascun colore. Sapreste ancora trovare una strategia?

13. **I numeri di Fermat.** Dato $n \in \mathbb{N}$ definiamo:

$$\mathrm{N}_n = 2^{2^n} + 1$$

I numeri N_n si chiamano *numeri di Fermat*. Fermat aveva congetturato che tali numeri fossero tutti primi... ma, come fu mostrato da Eulero, la congettura è falsa. Provate anche voi a confutarla:

- Dimostrare che F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sono primi.
- Dimostrare che F_5 è divisibile per 641. [Traccia: può essere utile osservare che $641 = 2^4 + 5^4 = 1 + 5 \cdot 2^7$]

Possiamo comunque utilizzare i numeri di Fermat per dare una dimostrazione che i numeri primi sono infiniti:

- Dimostrare che se $n \neq m$ allora F_n e F_m sono coprimi, ossia il loro massimo comune divisore è 1.
- Dedurre dal punto precedente che i numeri primi sono infiniti.

14. Supponiamo che $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ siano k distinti numeri interi.

- È vero che

  $$\Sigma_k = (a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\cdots+(a_{k-1}-a_k)^2+(a_k-a_1)^2$$

  è un numero pari, per ogni scelta di $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$?
- Sia $k = 4$: trovare il minimo valore di Σ_4 al variare della scelta degli a_i e caratterizzare le scelte degli a_i che minimizzano Σ_4.
- Dimostrare che, per ogni $k \geq 1$, vale

  $$\Sigma_k \geq \frac{4(k-1)^2}{k}$$

  e caratterizzare la scelta degli a_i che minimizzano Σ_8.

Le soluzioni di questi esercizi compariranno sulla pagina web dell'orientamento dedicata al giornalino

http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days

verso fine ottobre. Per avere suggerimenti subito scriveteci all'indirizzo e-mail *counseling.dm.unipi@gmail.com*

Un gioco e la sua storia: l'Hex

Vogliamo proporvi un gioco che offre vari spunti matematici interessanti, oltre al divertimento che speriamo vi procureranno le partite che giocherete fra voi.

Il gioco in questione si chiama Hex ed è stato inventato dal danese Piet Hein (1905-1996), fisico, ingegnere, figura importante della resistenza danese durante la seconda guerra mondiale, divulgatore scientifico e anche poeta. Hein presentò il gioco nel 1942, col nome di Poligon.

Il nome Hex è stato attribuito più tardi in America. Infatti nel 1948 il gioco fu inventato di nuovo a Princeton, in maniera indipendente, da John F. Nash (1928-2015), celebre matematico recentemente scomparso. Nash ha ricevuto nel 1994 il premio Nobel per l'economia, per le applicazioni economiche dei suoi risultati in teoria dei giochi, e nel 2015 il premio Abel (per chi non lo conosce, si tratta di un equivalente per la matematica del premio Nobel).

Presentandovi l'Hex in questo giornalino vogliamo anche onorare i suoi inventori, che, come avrete capito dai pochi accenni precedenti, sono stati figure di spicco nel panorama sociale, matematico e scientifico.

L'Hex ha regole semplici. La scacchiera è a forma di rombo, ha le caselle esagonali ed è di solito nel formato 11×11 (alla fine di questa sezione trovate una pagina con una scacchiera che potrete usare, dopo averla fotocopiata, per fare molte partite).

Ci sono due giocatori, che utilizzano rispettivamente delle pedine bianche e delle pedine nere. Le sponde contrapposte che si trovano a sinistra in basso e a destra in alto sono 'bianche', le altre due sono 'nere'.

Comincia a giocare il bianco, che pone un pedina bianca in una casella della scacchiera a sua scelta. Poi tocca al nero, che pone una pedina nera in una casella vuota, e così via, ogni giocatore a turno pone una pedina del proprio colore in una casella ancora libera. Lo scopo del giocatore bianco è quello di costruire un 'percorso', fatto di caselle consecutive con sopra pedine bianche, che colleghi le due sponde bianche. Lo scopo del nero è quello di costruire un percorso 'nero' che colleghi le due sponde nere. Vince il giocatore che riesce per primo a conseguire il suo scopo (vedi Figura 3).

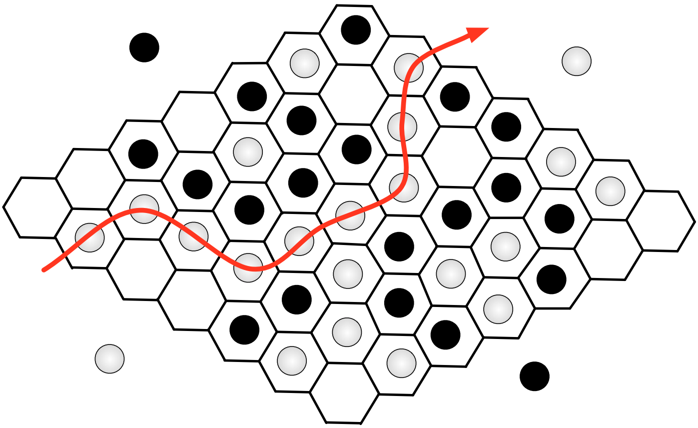


Figura 3: Il bianco ha vinto la partita (il percorso vincente è evidenziato).

Interessante, diranno alcuni di voi, ma la matematica dov'è? La matematica, come accade spesso, salta fuori non appena si comincia a porsi delle domande. Per esempio: una partita di Hex ha sempre un vincitore o può anche finire in parità? È vero o falso che il giocatore bianco, visto che pone la prima pedina sulla scacchiera, è in posizione di vantaggio?

Per ragioni di spazio non possiamo in questo breve paragrafo dare riposte complete (per quelle vi consigliamo di consultare i testi indicati in bibliografia). Vi diamo però alcune indicazioni. Innanzitutto enunciamo il seguente:

Teorema 1 (Il Teorema dell'Hex)**.** *Consideriamo un intero positivo n e una scacchiera da Hex di dimensione $n \times n$. Supponiamo di avere x pedine bianche e $n^2 - x$ pedine nere, con $0 \leq x \leq n^2$, e di usarle per riempire la scacchiera. In qualunque modo vengano disposte le pedine, esiste sulla scacchiera un percorso vincente bianco o nero.*

Questo teorema si può dimostrare con alcune osservazioni elementari che riguardano percorsi su grafi e ci dice in particolare che una partita di Hex non può mai finire in parità (perchè?).

Un aspetto interessante della questione è che il Teorema dell'Hex è equivalente ad un teorema che apparentemente sembrerebbe di tutt'altra natura:

Teorema 2 (Teorema del punto fisso di Brouwer)**.** *Sia $f : Q \to Q$ una funzione continua da un quadrato Q (che comprende il suo bordo, ossia è 'chiuso') in sé. Allora esiste almeno un* punto fisso *per f, ossia un $x \in Q$ tale che $f(x) = x$.*

A sorpresa, un teorema su una scacchiera esagonale riempita di pedine e un teorema su funzioni continue nel piano si rivelano l'uno profondamente legato all'altro ('equivalente' vuol dire che partendo dall'enunciato di uno qualunque dei due teoremi possiamo dimostrare l'altro).

Se volete addentrarvi in questo 'mistero', che riguarda quell'area della matematica che si chiama *topologia*, potete consultare [G1979] oppure [DGP] (Parte III).

Anche la domanda sul vantaggio del bianco ha una risposta matematicamente interessante: sì, il bianco possiede una strategia vincente, e si può dimostrare facilmente (vedi [G2009] oppure [DGP]) con una dimostrazione però 'per assurdo', che non fornisce una concreta strategia vincente. Questa in realtà è una buona notizia per il gioco, che risulta dunque sempre interessante da giocare (tanto che si svolgono tornei internazionali, e anche sfide fra computers, proprio come per gli scacchi).

Per coloro che sono proprio giocatori incalliti proponiamo adesso alcune varianti. Una è la seguente: la prima mossa avviene regolarmente, e il primo giocatore pone sulla scacchiera la sua pedina. Ma dalla seconda mossa in poi, ogni giocatore, al suo turno, pone *due* pedine sulla scacchiera.

C'è anche una variante in cui viene modificata solo la prima mossa del secondo giocatore: la prima volta che gioca, il secondo giocatore può porre due pedine sulla scacchiera, dopodiché tutto procede come in una normale partita a Hex. Come potete facilmente verificare nel caso di una scacchiera piccola, tipo 2×2, 3×3 o 4×4, questo garantisce la vittoria al secondo giocatore. Sarà così anche per scacchiere grandi?

Osserviamo che entrambe le varianti mantengono la proprietà di non ammettere un finale in parità, visto il Teorema dell'Hex.

Un'altra variante interessante si ottiene se si cambiano, rovesciandole, le condizioni per la vittoria. L'Hex 'alla rovescia' è quello in cui un giocatore perde se sulla scacchiera compare un percorso di pedine del suo colore che collega le sue due sponde. Di nuovo, il Teorema dell'Hex ci garantisce che il gioco non ammette finale in parità. Si può mostrare che esiste un giocatore che ha una strategia vincente. Ma quale dei due? Per incuriosirvi, vi anticipiamo che la risposta dipenderà dal formato della scacchiera, e che le partite di Hex alla rovescia tendono ad essere piuttosto lunghe... provate!

Riferimenti bibliografici

[BCG] E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways for your Mathematical Plays*, Vol. I and II, Academic Press, (1982).

[DGP] E. Delucchi, G. Gaiffi, L. Pernazza, *Giochi e percorsi matematici*, Springer, 2012.

[G1979] D. Gale, *The game of Hex and the Brouwer Fixed Point Theorem*, Amer. Math. Monthly 86, (1979).

[G2009] D. Gale, *Topological games at Princeton, a mathematical memoir*, Games and Economic Behavior 66 (2009).

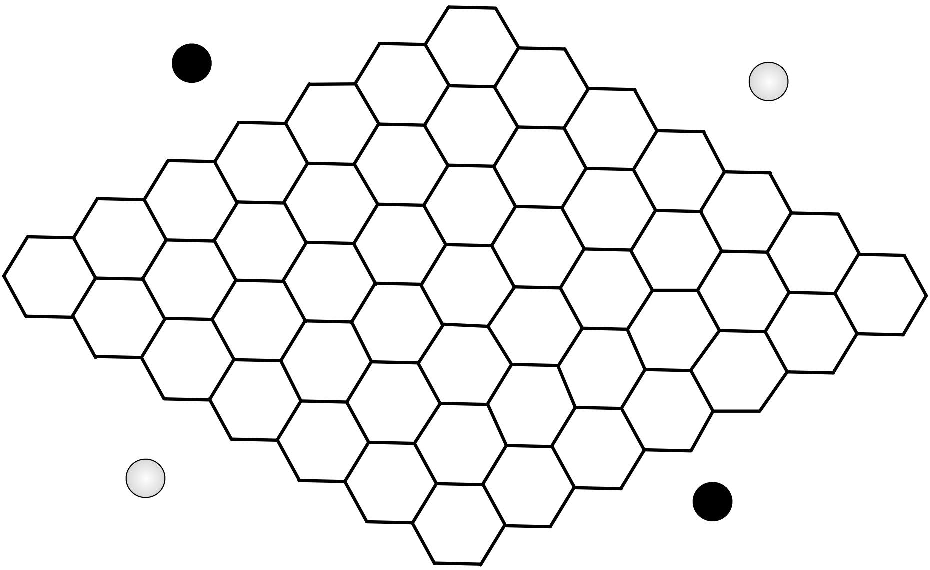


Figura 4: Una scacchiera 7×7 per le prime partite di prova...

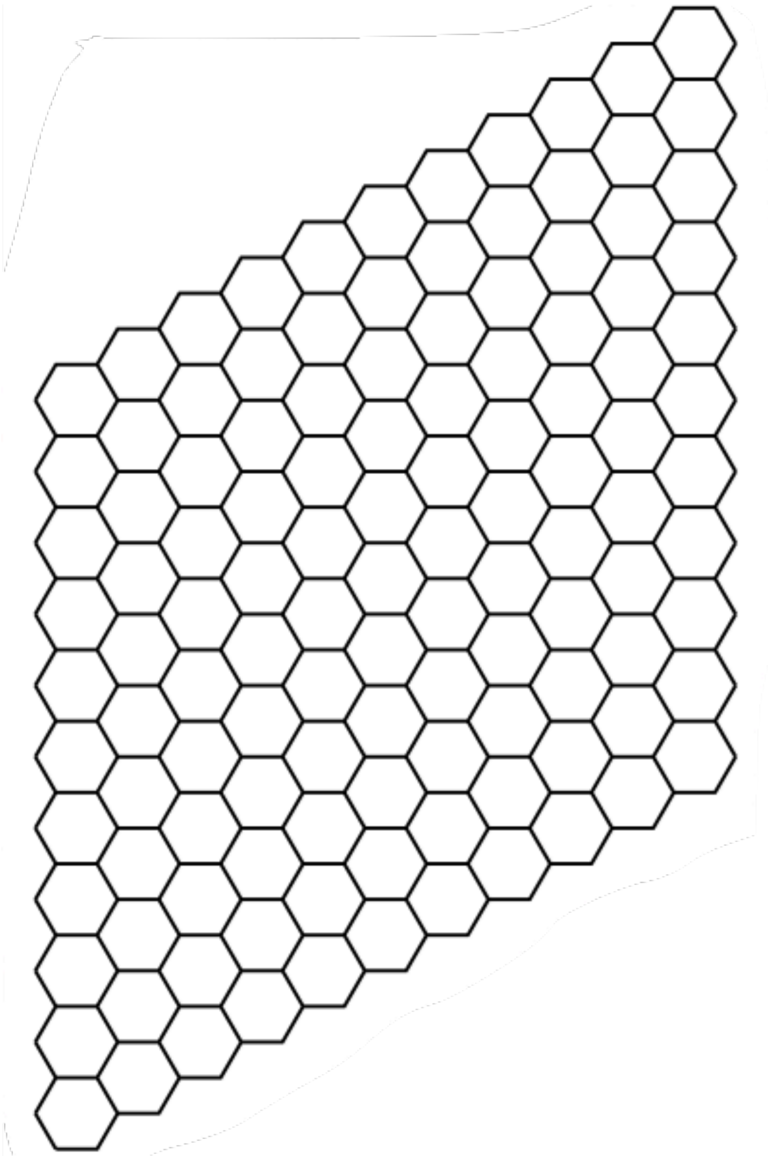


Figura 5: Una scacchiera 11×11: buon divertimento!

Prossimi eventi

L'offerta degli eventi di orientamento per l'anno 2015-2016 non finisce qui! In particolare vogliamo segnalarvi le seguenti iniziative.

- La Settimana Matematica, l'evento principale di orientamento, prevista per i primi di febbraio 2016. È una manifestazione di tre giorni, pensata per coinvolgere gli studenti in laboratori con attività matematiche significative e stimolanti in cui provare a "fare matematica" con la guida dei docenti del nostro Dipartimento. Saranno anche presentate varie applicazioni della matematica, attraverso conferenze e seminari. Verranno inoltre fornite informazioni approfondite sulla struttura, l'organizzazione e i corsi del Corso di Studio in Matematica dell'Università di Pisa e ci sarà la possibilità di entrare in contatto con studenti e dottorandi che affiancheranno come tutors i partecipanti nelle varie attività previste.

  È necessaria l'iscrizione: le pre-iscrizioni online solitamente si aprono nel mese di dicembre e si chiudono a inizio gennaio. Le informazioni le potrete trovare alla pagina web https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/settimana-matematica-2015.

- Gli Open Days di Ateneo, previsti per fine Febbraio 2016, in cui potrete confrontarvi con studenti universitari e... trovare un nuovo numero di questo giornalino!

Per ogni ulteriore informazione riguardante questi e altri eventi, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e del numero precedente, vi invitiamo a visitare il sito (http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento).

STAMPATO IN PROPRIO