PISA, OTTOBRE 2020

Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

Università di Pisa

Matematica
il giornalino degli open days

notizie, giochi e pillole di matematica

Su indicazione della Commissione Orientamento.

Realizzato con la collaborazione degli studenti counselling:

Davide La Manna
Francesca Rizzo

Coordinamento: Alessandra Caraceni, Giovanni Gaiffi

Grafica: Alessandra Caraceni

Introduzione

Ecco a voi l'edizione numero undici del **Giornalino degli Open Days**.

Questa pubblicazione a cura di professori e studenti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, prodotta contestualmente alle attività di orientamento, si rivolge principalmente a studenti delle scuole secondarie superiori.

Come sempre, la prima sezione è dedicata a chi stia considerando la possibilità di intraprendere un percorso universitario di sapore matematico: contiene una presentazione del Corso di Laurea in Matematica (così come declinato presso l'Università di Pisa). Oltre a una serie di informazioni puntuali sull'offerta didattica, troverete dati statistici a partire dai quali potrete farvi un'idea del futuro lavorativo che aspetta un neo-laureato in Matematica.

A seguire, una particolarità di questo numero: l'ex-studente dell'Università di Pisa **Giuseppe Giorgio Colabufo** ci racconta la sua esperienza presso l'Ecole Polytechnique di Parigi, spiegandoci come gli accordi fra le due università offrano l'occasione di conseguire un doppio titolo di studi.

Un'altra novità di questo numero è il nostro primo articolo in lingua inglese, che presentiamo con traduzione italiana a fronte (il nostro giornalino si apre così a contributi internazionali!): la ricercatrice **Maria Christodoulou** ci parla dell'importanza dei dati e del potere della statistica.

Un secondo articolo firmato da **Francesco Ballini**, recente laureato magistrale presso il nostro dipartimento, ci propone il problema dell'approssimazione con razionali il più "semplici" possibile e ci accompagna alla scoperta delle frazioni continue.

Nella rubrica dedicata ai giochi matematici vi parliamo di *Game of Life*: non dimenticate di far prendere vita alle immagini dell'articolo inquadrando con il cellulare i QR acclusi e aprendo i link corrispondenti!

Segue la rubrica "i problemi del giornalino": come sempre vi proponiamo una piccola raccolta di problemi matematici con i quali confrontarvi,

SCAN ME

Scopri gli altri numeri del giornalino e la raccolta dei problemi delle edizioni passate all'indirizzo `https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days`!

di cui vi rinnoviamo l'invito ad inviarci le vostre soluzioni (assieme ai vostri eventuali dubbi!) all'indirizzo

`LezioniAperteMatematica@gmail.com`.

Se voleste cimentarvi con altri problemi matematici, visitate la pagina del giornalino tramite il QR qui sopra: vi troverete una raccolta con i problemi apparsi negli scorsi numeri, completi di soluzioni!

E se dopo tutto questo non siete ancora sazi di matematica, niente paura: la nostra ultima rubrica contiene un ampio assortimento di consigli di lettura, nonché una lista di film e una di link a siti web che potrebbero fare al caso vostro.

Indice

Il corso di laurea in Matematica

Se ti stai avvicinando alla fine del tuo percorso scolastico e devi scegliere cosa fare all'università, probabilmente passerai la giornate a cercare informazioni sul mondo universitario, analizzando e confrontando i vari corsi di laurea, per offerta formativa, rapporto laureati-occupati, esperienze e sbocchi professionali, alla ricerca di quello che fa per te.

Beh, se fra le opzioni che stai considerando c'è anche matematica, sei nel posto giusto. In questa sezione proveremo a presentarti il nostro Dipartimento, con le numerose opportunità che offre.

1 Il corso di laurea a Pisa

Di preciso cosa ti aspetta se studierai matematica a Pisa? Il Corso di Laurea in Matematica si divide formalmente in Laurea Triennale e Laurea Magistrale. La prima corrisponde al titolo internazionale *Bachelor's degree* e prevede il conseguimento di 180 Crediti Formativi Universitari (CFU) in tre anni accademici; la seconda, invece, è internazionalmente identificata con la *Master's degree*, e prevede il conseguimento di 120 CFU. Ogni CFU corrisponde orientativamente a 25 ore tra lezioni e studio individuale.

La triennale a Pisa offre una solida preparazione di base, cercando di offrire un ampio ventaglio di corsi sui vari ambiti di ricerca in matematica: troverete corsi di algebra, analisi e geometria, ma anche di analisi numerica, meccanica razionale, probabilità e molto altro! L'unica scelta (non restrittiva) che viene chiesta all'inizio del secondo anno è fra due curricula, uno più teorico, che prevede anche una solida preparazione fisica, e un secondo più applicativo-modellistico. Più precisamente:

- il curriculum fondamentale;
- il curriculum computazionale.

SCAN ME

Visita il sito del Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa per maggiori informazioni!

Entrambi i curricula sono molto validi, grazie alla collaborazione con i Dipartimenti di Fisica e di Informatica, i cui docenti si occupano della gestione dei corsi di tali indirizzi anche per noi studenti di matematica. In entrambi i casi i piani di studio sono da completare con alcuni "esami a scelta", corsi che ognuno può scegliere a piacere fra i numerosi offerti dal Dipartimento, così da poter integrare il proprio percorso in base ai propri gusti.

Nella maggior parte dei casi, i laureati triennali scelgono di proseguire gli studi con la magistrale in matematica restando a Pisa. Il percorso in magistrale è fatto su misura per lo studente, dal momento che durante il biennio c'è la necessità di specializzare il proprio piano di studi in un preciso settore di ricerca. I curricula offerti sono i seguenti: didattico, modellistico, applicativo, generale e teorico.

Un altro punto di forza del nostro dipartimento è la possibilità di fare esperienze di studio all'estero, grazie ad alcuni accordi internazionali. L'università ha preso degli accordi particolarmente prestigiosi con l'École Polytechnique di Parigi (vedi al riguardo la testimonianza di Giuseppe Giorgio Colabufo a partire da pag. 13) e la Hokkaido University, che consentono il conseguimento di titoli congiunti. Insieme a questi ci sono anche gli accordi Erasmus, che permettono di svolgere uno o più semestri di studio presso un'altra università europea, per dare esami particolari o lavorare alla tesi. In particolare un accordo di questo tipo è stato stipulato di recente con l'ETH di Zurigo. Potete trovare altre informazioni e rimanere aggiornati sugli accordi più recenti sulla pagina dell'Internazionalizzazione

`http://www.dm.unipi.it/webnew/it/internazionalizzazione/internazionalizzazione`

Nella Tabella 1 trovate l'elenco degli esami da sostenere durante la laurea triennale, molti dei quali riguardano argomenti non trattati a scuola.

Fondamentale	**Computazionale**
I anno	
Aritmetica (9 CFU)	
Fondamenti di programmazione con laboratorio (9 CFU)	
Laboratorio di comunicazione mediante calcolatore (3 CFU)	
Analisi matematica 1 (15 CFU)	
Geometria 1 (15 CFU)	
Fisica I con laboratorio (9 CFU)	
II anno	
Algebra 1 (6 CFU)	
Analisi numerica con laboratorio (9 CFU)	
Inglese scientifico (6 CFU)	
Analisi matematica 2 (12 CFU)	
Geometria 2 (12 CFU)	
Elementi di probabilità e statistica (6 CFU)	
Laboratorio didattico di matematica computazionale (3 CFU)	
Esame a scelta (6 CFU)	Algoritmi e strutture dati (6 CFU)
III anno	
Meccanica razionale (6 CFU)	
Fisica II (9 CFU)	Calcolo scientifico (6 CFU)
Fisica III (6 CFU)	Laboratorio computazionale (6 CFU)
Laboratorio sperimentale di matematica computazionale (6 CFU)	Linguaggi di programmazione con laboratorio (9 CFU)
	Ricerca operativa (6 CFU)
4 Esami a scelta (24 CFU)	*3 Esami a scelta* (18 CFU)
Prova finale (9 CFU)	

Tabella 1: Gli esami della Laurea triennale secondo il Regolamento dell'Anno Accademico 2020-2021 (vedi [7]).

Per iniziare a capire cosa studiano queste discipline, quali problemi cercano di risolvere e quali sono alcune delle tecniche usate, consigliamo il libro:

R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri.

Si tratta di uno dei migliori libri introduttivi alla matematica, dal carattere divulgativo ma contenente vari teoremi con dimostrazioni vere e proprie che costituiscono dei primi esempi di "vera" matematica.

2 Sbocchi occupazionali

Qual è il posto di un matematico nel mondo? La pagina de "I Mestieri dei Matematici"

`https://www.mestierideimatematici.it`

cerca di rispondere a questa domande, e magari vi stupirà!

Per chi non fosse ancora convinto, vi presento i risultati di un paio di indagini svolte a livello sia internazionale sia locale. In generale risulta che i laureati in matematica siano soddisfatti della scelta fatta e godano di un ampio spettro di possibilità lavorative, e non solo in ambito scolastico o universitario! In particolare:

- Secondo l'Occupational Information Network (sito patrocinato dal ministero del lavoro americano, vedi [3]) i matematici si meritano la medaglia d'argento per il lavoro in cui "si guadagna tanto e ci si stressa poco" (vedi [4]); infatti sia che lavorino nei centri di ricerca sia che prestino servizio nelle grandi aziende, la media salariale dei matematici è di 88mila euro all'anno, con un indice di stress di 57/100. Da considerare che sono indicati come lavori differenti gli statistici (5° posto, quindi comunque molto alto), i sistemisti (17°) e gli sviluppatori informatici (18°), tutti lavori accessibili dal CdL in matematica.

- I dati di Almalaurea (vedi [1], [6]) riportano che il tasso di occupazione dei laureati magistrali in matematica all'Università di Pisa a tre anni dalla laurea è del 95,1%.

- Sempre dal sito di Almalaurea [5] si possono trarre i seguenti dati che riguardano in particolare l'ateneo pisano, vedi [6]:
  - In media il tempo necessario per completare la laurea triennale in matematica a Pisa è di 3,9 anni.
  - Il 100% di coloro che hanno conseguito la laurea triennale in matematica a Pisa nel 2019 desidera proseguire gli studi.

Da alcuni anni, il Dipartimento di Matematica di Pisa si è attivato per permettere ai suoi studenti, anche triennali, di conoscere le realtà lavorative del territorio pisano, ma anche nazionale. Allo stesso tempo, le aziende (e non solo) che vengono in visita presso il nostro dipartimento hanno l'occasione di conoscere gli studenti alla fine del loro percorso di studi.

Con questo duplice scopo nasce il progetto "Matematici al Lavoro", sul quale potete scoprire tutti i dettagli visitando la pagina web

https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/matematici-al-lavoro-0

3 Borse di studio

Un'occasione riservata agli studenti che si iscrivono a matematica è quella delle borse di studio dell'INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica "Francesco Severi"), assegnate tramite un concorso nazionale che si svolge in diverse sedi in Italia (una è proprio Pisa) all'inizio di settembre.

In particolare per il corso di laurea triennale in matematica sono bandite diverse borse di studio (30 nell'anno 2019/2020), ciascuna del valore di 4000 euro. Le borse possono essere rinnovate annualmente per i primi tre anni di studi, purché lo studente che ne beneficia superi tutti gli esami entro la fine dell'anno con una media superiore al 27/30 e senza voti inferiori al 24/30.

È una bella occasione che vale la pena prendere in considerazione! Per maggiori informazioni, visita https://www.altamatematica.it.

Bibliografia

[1] https://www2.almalaurea.it/cgi-php/universita/statistiche/framescheda.php?anno=2019&corstipo=LS&ateneo=tutti&facolta=tutti&gruppo=1&pa=tutti&classe=11045&postcorso=tutti&isstella=0&annolau=tutti&condocc=tutti&iscrls=tutti&disaggregazione=&LANG=it&CONFIG=occupazione

[2] http://scuola24.ilsole24ore.com/art/universita-e-ricerca/2017-08-18/-statistica-chimica-lauree-che-danno-lavoro-9-studenti-10-181043.php?uuid=AEBLghEC

[3] https://www.onetonline.org

[4] http://www.alleyoop.ilsole24ore.com/2017/10/25/ecco-24-lavori-perfetti-ad-alto-tasso-di-guadagno-e-a-basso-tasso-di-stress/

[5] https://www2.almalaurea.it

[6] https://www.dm.unipi.it/webnew/it/qualita/situazione-occupazionale-dei-laureati

[7] http://www.dm.unipi.it/webnew/sites/default/files/Reg_LT_1920.pdf

Testimonianza sul percorso di doppia laurea UniPi-X

di ***Giuseppe Giorgio Colabufo***, *laureato magistrale in Matematica presso l'Università di Pisa e diplomato Ingénieur Polytechnicien presso l'Ecole Polytecnhique di Parigi*

1 Introduzione

Mi è stato chiesto di raccontare brevemente la mia particolare esperienza universitaria. Da qualche anno i dipartimenti di Matematica e di Fisica dell'Università di Pisa hanno sottoscritto un accordo con l'Ecole Polytechnique di Parigi [1] che permette ad alcuni ragazzi di conseguire un doppio titolo al termine del cursus di laurea magistrale. Ho raccolto in questo breve documento le presentazioni fatte per la giornata di promozione delle opportunità offerte dalle iniziative di mobilità internazionale a settembre 2019 e per gli Open days del dipartimento a marzo 2020. Ho cercato di includere anche le risposte alle domande che mi son state poste in quelle occasioni.

1.1 L'Ecole Polytechnique

Un po' di contesto storico (molto in breve) [2]: l'Ecole Polytechnique è stata fondata nel 1794 da Lazare Carnot e Gaspare Monge. Nel 1804 Napoleone la militarizza con lo scopo di formare le giovani menti che poi lo aiuteranno a governare il paese, facendo leva sulla formazione scientifica e in particolare sulla matematica. È sempre Napoleone che conia il motto di Polytechnique: «Pour la patrie, les sciences et la gloire»[1]. Ancora oggi gli studenti francesi sono sotto statuto militare, e questo permette agli

[1] «Per la patria, la scienza e la gloria».

studenti internazionali di partecipare alle cerimonie che periodicamente si svolgono sul campus e in città. Nel 1976 l'X si sposta dal centro di Parigi (dove è ancora possibile vedere la sede storica in rue Descartes, sul colle Sainte-Geneviève nel *V arrondissement* di Parigi) al campus di Palaiseu, dove risiede attualmente. Dal 2018 fa parte dell'*Institut Polytechnique de Paris* [3], un raggruppamento di università e *grandes écoles* che si propone di migliorare la ricerca scientifica e l'offerta didattica tramite la collaborazione dei suoi membri. In Francia l'Ecole Polytechnique è soprannominata semplicemente l'«X» (che è diventato quindi anche il suo logo). Ci sono diverse teorie su questo soprannome: c'è chi dice che sia la stilizzazione di due spade o di due cannoni incrociati, risalente al periodo napoleonico; un'ipotesi meno bellicosa afferma che la «X» sia una «x», ovvero l'incognita per eccellenza, e farebbe dunque riferimento alla matematica e al suo insegnamento.

2 Il percorso di doppio titolo

L'accordo prevede che uno studente di Pisa parta a metà del terzo anno di laurea triennale, per inserirsi nel ciclo *ingénieur polytechnicien* [4]. A livello logistico si trascorrono circa due anni e mezzo in Francia e si rientra poi a Pisa per un ultimo anno di corso di laurea magistrale. Per partecipare al progetto bisogna presentare domanda (corredata di certificato degli esami sostenuti, curriculum vitæ...) e poi sostenere un test d'ingresso presso l'Ecole Polytechnique. Il test consiste in due prove scritte e due orali di matematica e fisica. C'è poi una terza prova orale, che è un colloquio in cui si misura la motivazione del candidato, il suo livello di comprensione di un testo scientifico (a me chiesero di leggere e commentare un articolo tratto da un periodico di economia) e eventualmente di lingua. Si può scegliere se effettuare le prove in inglese o in francese. Avendo fatto esperienza di due anni a Pisa, la prova di matematica si affronta senza difficoltà, quella di fisica va invece preparate con maggior impegno, soprattutto se non si è sostenuto l'esame di Fisica II.

Come si vede anche nel diagramma in Figura 1, i primi mesi prevedono una *full immersion* per gli studenti internazionali, che – in aggiunta a corsi di matematica e fisica – possono usufruire di corsi di lingua e cultura francese, utili soprattutto per comprendere il funzionamento del sistema didattico francese. A partire da aprile, iniziano i corsi veri e propri, tutti obbligatori per il primo trimestre. Da settembre, cioè da quello che in figura è indicato come il secondo anno, si possono scegliere i corsi da seguire, con alcuni vincoli sul piano di studi. Per terzo anno, oltre ai corsi si sceglie una specializzazione (per matematica si tratta di scegliere tra un indirizzo più teorico e uno più applicativo). Infine, all'ultimo anno si rientra a Pisa per completare il percorso, seguendo gli ultimi corsi e preparando la tesi (che può essere svolta in co-tutela con un professore dell'X).

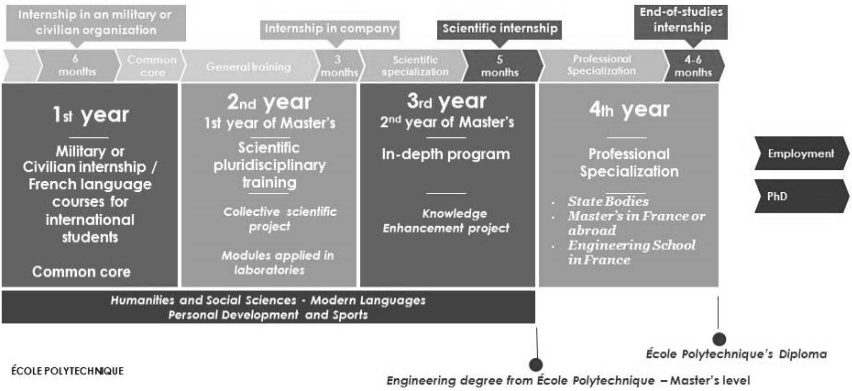


Figura 1: Il ciclo *ingénieur polytechnicien*.

2.1 Gli stage

Nel corso di studi dell'X sono previsti due *stage*, o tirocini. Il primo è un lavoro estivo in azienda, per permettere di aver un primo contatto col mondo del lavoro. Ho apprezzato molto quest'esperienza perché mi ha fatto conoscere l'ambiente stimolante e familiare delle start-up.[2] Il secondo stage è molto simile a quello che può essere un lavoro di tesi (a livello magistrale). Questo stage, della durata prevista di quattro-sei mesi e da svolgersi in una università o presso un centro di ricerca, è previsto per il secondo semestre del terzo anno, che è quindi un anno in cui i corsi obbligatori si seguono solo durante il primo semestre.

2.2 Perché partecipare a questo percorso

> «Durante i miei studi scoprii l'esistenza di programmi di scambio. Alcuni di voi conosceranno l'*Erasmus*, che consente di tra-

[2] Ho lavorato nell'équipe ricerca e sviluppo, con funzioni anche di programmatore, di ARMIS.TECH, che si occupa di fornire soluzioni di *pubblicità multilocale* su internet.

scorrere un periodo all'estero durante gli studi universitari; la Normale ha accordi particolari con le *Ecoles Normales* francesi, di cui mi avvalsi per trascorrere un periodo di sei mesi a Lione. Fu un'esperienza importante, l'occasione di conoscere un secondo mondo: consiglio a chiunque di passare un periodo all'estero!»

– Alessio Figalli

Non posso non condividere queste parole di Alessio Figalli (leggi la sua intervista sul Giornalino degli Open Days di settembre 2019! [5]). Fare un'esperienza all'estero contribuisce ad aprire la mente, scoprire nuove culture che si manifestano anche attraverso il diverso approccio all'educazione. Nello specifico, l'Ecole Polytechnique è considerata la migliore *grand école* di Francia e tra le migliori piccole università a livello mondiale. Unire il suo prestigio a quello altrettanto noto dell'Università di Pisa non può che far bene al curriculum. Inoltre, è un'occasione per approfondire la conoscenza delle lingue: durante i due anni e mezzo i corsi di francese settimanali sono obbligatori e c'è la possibilità di prendere una certificazione già alla fine del primo anno. Similmente per l'inglese.

Oltre a queste motivazioni "pratiche", l'essere studente italiano sul campus mi ha permesso di incontrare diverse personalità, e del mondo accademico e di quello politico. Infatti, sul campus gli studenti italiani non sono tanti (molti di più i ricercatori e i professori) ma hanno l'onore e l'onere di rappresentare il proprio paese, costruendo rapporti di amicizia e condividendo la propria cultura con gli altri studenti da ogni parte del mondo.

2.3 La vita sul campus

Sebbene si presenti come Ecole Polytechnique di Parigi, il campus si trova fuori città, verso sud, più precisamente a Palaiseau, a poco meno di venti chilometri. Il centro di Parigi è raggiungibile in una mezz'oretta coi mezzi pubblici. All'interno del campus esistono una miriade di attività ricreative organizzate dalle tante associazioni studentesche. Ci si può trovar davvero di tutto, da corsi di enologia, a club sportivi (rugby, tennis, pallacanestro, sci, vela...) che organizzano nel corso dell'anno diversi eventi e uscite durante i fine settimana o le vacanze, o ancora l'orchestra e i gruppi di teatro che organizzano spettacoli ogni due o tre mesi. Ci sono persino associazioni culinarie che preparano hamburger, sushi, o vere e proprie cene per coinvolgere tutti gli studenti, e c'è anche un gruppo di studenti che gestisce il bar del campus e le serate. La presenza di studenti internazionali ha fatto sì che nascessero associazioni culturali legate ai rispettivi

Figura 2: Studenti internazionali all'X.

paesi di provenienza. Sono stato per un anno presidente di *ItaliX*, con la quale abbiamo organizzato cene, aperitivi ma anche cineforum e spettacoli teatrali per promuovere la cultura italiana. Un paio di volte sono stati organizzati anche viaggi a Roma e Napoli.

3 Altre proposte di mobilità internazionale e link utili

Alcune informazioni utili riguardo alle opportunità di mobilità internazionale possono essere trovate sul sito del dipartimento di matematica presso la sezione Internazionalizzazione: `http://www.dm.unipi.it/webnew/it/internazionalizzazione/internazionalizzazione`.

Altri link utili sono:

- Il sito dell'Ecole Polytechnique: `https://www.polytechnique.edu/`
- Il libretto *Cycle d'ingénieur polytechnicien*: `https://gargantua.polytechnique.fr/siatel-web/app/linkto/mICYYYTJ(5Z`

Figura 3: Alcuni eventi organizzati da *ItaliX*.

- Il sito del Dipartimento di Matematica:
  http://www.dm.unipi.it/webnew/it
- La sezione orientamento del DM:
  http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento

Bibliografia

[1] http://www.dm.unipi.it/webnew/sites/default/files/internazionalizzazione/Polytechnique.pdf

[2] https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Histoire_de_l%27École_polytechnique&oldid=170903572

[3] https://www.ip-paris.fr/en/home-en/

[4] https://programmes.polytechnique.edu/cycle-ingenieur-polytechnicien/cycle-ingenieur-polytechnicien

[5] https://www.dm.unipi.it/webnew/sites/default/files/orientamento/Giornalino_09.pdf

The data whisperers

*di **Maria Christodoulou**, ricercatrice presso l'Università di Oxford*

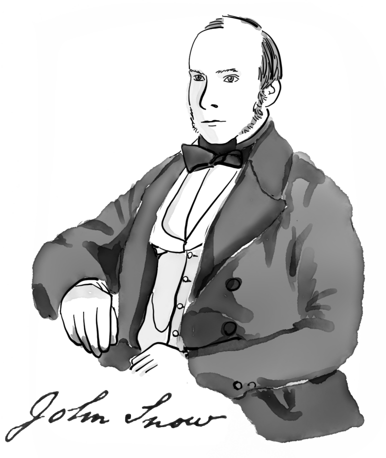
Traduzione italiana a pag. 26

How do you find the epicentre of a cholera epidemic? How do you work out why women in one clinic die at a higher frequency than women in another one? How do you go about breaking a coded message? How do you decide which players will help you win the season?

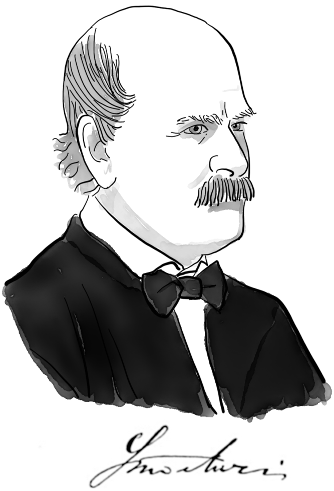
The answer to all these questions is: you look at the data.

Let's set the scene, we're in London, and the year is 1854. It's the end of August, and the city is affected by yet another cholera outbreak. The people are scared, and the physicians have no concrete theories that can help them understand how the disease is transmitted and what they can do to stop it. It is a time of unsanitary conditions in this populous and impoverished part of the city. Enter our protagonist, physician John Snow, who started interviewing the locals and recording the patterns he observed. Through his meticulous data collection, he noticed something interesting: many of the affected residents had been using the water pump on Broad Street for their daily water needs. He collected some water from the pump and tried to study it, but as he was not yet sure what he was looking for, he found that line of investigation to be inconclusive. Yet his collected data, superimposed on hand-drawn local area maps, showed him an obvious pattern: the water pump on Broad Street had something to do with this. He took his findings to the local authorities and convinced them that the pump was somehow connected to the outbreak. The authorities removed its handle, effectively rendering it unusable, and the outbreak subsided. Or so the story goes. Dr Snow is now considered one of the founders of modern epidemiology. And it all started by collecting data.

Snow was not the only one doing so. A few years before him, in 1846 at a Viennese hospital, a young Hungarian physician called Ignaz Semmelweis



was starting his new job. And he was greatly distressed by the rumours he was hearing. The hospital had two maternity clinics: one was staffed by physicians and medical students, and another staffed exclusively by midwives. The two clinics had substantially different maternal mortality rates from postpartum infections: one with a 2% mortality rate, and the other with mortality ranging from 13% to 18%. That difference was staggering, and Semmelweis had absolutely no idea why this was happening. He started observing and collecting data, and the first thing he noted was that, contrary to what you may also be thinking, the clinic staffed by physicians was the one with the high mortality. The proverbial penny dropped under tragic circumstances – in March 1847, Semmelweis' friend and co-worker, the pathologist Jakob Kolletschka, died from an infection caused by a scalpel injury. Semmelweis noticed that Kolletschka had received his injury while performing an autopsy on a patient who had died from postpartum infection. That's when he made the connection: whatever it was that caused the death of the patient was transferred to the pathologist conducting the autopsy. His observation, together with his knowledge that almost all physicians had to conduct autopsies as opposed to midwives, led to one simple conclusion: something was transferred from the autopsies to the maternity ward leading to the increased maternal mortality in the physicians' clinic. He proposed an intervention: strict handwashing and disinfection protocols for all physicians after every autopsy. It was novel and radical. And it worked: suddenly mortality rates dropped dramatically in



the physicians' clinic. When it comes to hygiene practices surrounding childbirth, Semmelweis was a trailblazer.

Let's move further forward in history, to the Second World War, a time when intel and data were valuable commodities. We find ourselves in Bletchley Park, the hub of British cryptanalysis. Let us not focus on Alan Turing right now – although he was undoubtedly a fascinating man - let us focus on a young linguist instead. Mavis Batey was 19 and studying German at University College London when the war started. Her language skills were absolutely crucial to the war effort. Breaking code after code, her work ensured the safe planning of D-Day. What does codebreaking have to do with data? Absolutely everything. Batey's edge as a codebreaker was provided by both her language skills, her talent in spotting patterns, and her familiarity with the enemy operators. She worked out that one of the operators had a girlfriend named "Rosa" and she used that knowledge to break the codes he was transmitting. She paid attention to the data. And here's another example: on one of the messages she was trying to decrypt, Batey noticed that the letter L was completely absent. Knowing well that Enigma machines never encoded a letter onto itself, she concluded that the sequence was a series of Ls. She used this to determine the setup for that day's machines, effectively helping decode crucial messages to the war effort.

Around sixty years later and across the Atlantic, looking for patterns in the data was used in a completely different setting – baseball. Although the study of baseball statistics was nothing new, a young economist named Paul DePodesta put his own spin on the whole thing. Working as an assistant to the General Manager of the Oakland Athletics, DePodesta decided to follow the data. He focused his analysis on the metrics that truly seemed to predict performance as opposed to those traditionally used by scouts in the past century. This ensured that the General Manager - Billy Beane - could use the Oakland A's limited budget to compose a team that was genuinely competitive, selecting players with complementary skills. After multiple strong seasons, their story was written up by financial journalist Michael Lewis and was also given the Hollywood treatment.

I could fill pages with stories of data collection and pattern recognition, but I would much rather show you just how intuitive and natural these processes are. Statistics help us detect patterns even when they are hiding in noisy data. They can also help us avoid the pitfall of biases, which we all inherently and unconsciously apply to everything we encounter.

Statistics can help us find the stories behind the numbers and they are the formalisation of our pattern recognition instincts.

Let me show you what I mean. This time I will put you in the shoes of somebody trying to uncover the story behind the numbers. Once upon a time there was a group of people, a little over 2000 of them, who found themselves experiencing an event. An event with devastating consequences. An event that led to the deaths of over 65% of that group. I will be upfront and tell you now that this event was not a disease. But something did happen, and people died. And to help us work out what happened we have data. Let us start by looking at the data.

	By economic status and sex					
	Population Exposed to Risk			Number of Deaths		
Economic Status	Male	Female	Total	Male	Female	Total
I (high)	180	145	325	118	4	122
II	179	106	285	154	13	167
III (low)	510	196	706	422	106	528
Other	862	23	885	670	3	673
Total	1731	470	2201	1364	126	1490

Maybe this is a little overwhelming at first glance but let us approach it systematically. The table is broken up into two parts: the left-hand side is telling us how many people were exposed to that particular event, and the right-hand side is telling us how many died because of that event. The first thing to note is that the number of dead is substantial. Whatever happened, it was terrible. But then… maybe you start noticing a little more detail. Like, for example, isn't it strange how men seem to have it much worse than women? Granted, there were fewer women in the group to begin with, but it still looks unusual. Let's look at the percentages of dead in the population to get a clearer idea.

	% of dead in each risk group		
Economic Status	Male	Female	Total
I (high)	65.56%	2.76%	37.54%
II	86.03%	12.26%	58.60%
III (low)	82.75%	54.08%	74.79%
Other	77.73%	13.04%	76.05%
Total	78.80%	26.81%	67.70%

The table shows the percentage of people who died in each risk group. Nearly 80% of all men in the group died. Contrast this to the women in the group, which is around 27% and you detect that this event impacts the two sexes differently. But the tables also give us some information on what is referred to as "Economic Status". This seems to be ranked from "I" which is the high level to "III" which is the low level. But there is something peculiar here: a category named "Other". This is unexpected because it is not labelled as missing data. It is not as if we simply do not know the economic status of that group: that group does not belong in any of these categories. But this is a substantial group. Out of the 2201 people in the population, 885 belong to that group. That's 40% of the population in the "Other" group. This is important.

So, if you are a statistician or a data analyst, or just a data explorer as we are now, what do you do?

When the data you have raise more questions than answers, then all you can do is ask more questions. And luckily for us, we have a relatively crude breakdown of the same dataset, but instead of splitting it into male and female, this time we split it in adults and children.

	By economic status and age group					
	Population Exposed to Risk			Number of Deaths		
Economic Status	Adults	Children	Total	Adults	Children	Total
I (high)	319	6	325	122	0	122
II	261	24	285	167	0	167
III (low)	627	79	706	476	52	528
Other	885	0	885	673	0	673
Total	2092	109	2201	1438	52	1490

This table should really stop us in our tracks. This population is extremely unusual. Not only the number of children in the population is surprisingly low, at around 5%, they also seem to be following an unexpected pattern in the various economic groups. More specifically, the number of children in each group is not proportional to the size of that group. If it were, there would be more children recorded in the mysterious "Other" category. It also appears that dying as a child in this event is a situation exclusively found in the low economic status group.

These two datasets give us some particularly valuable clues: it appears that this population is not a natural population - otherwise the number of children would follow some more expected patterns, and the chance of dying appears to be lower if you are a woman or a child in the medium and high economic groups.

And there lies the essence of the dataset: we are exploring some sort of disaster that impacts men more than women and children, and economic status affects the likelihood of survival. Maybe war is your first thought, but the presence of economic status itself should make you suspicious. If on the other hand "women and children first" is more what comes to mind, then you're onto something. This maritime code of conduct, common in the 19th and early 20th century, suggested than in life-threatening situations women and children should be given priority to lifeboats. This rule really entered popular consciousness with the RMS Titanic maritime disaster, when on her maiden voyage she hit an iceberg and sank in the icy waters of the North Atlantic Ocean. And when she sank, she took down with her almost 1500 souls. To be precise, 1490 people out of the 2201 total perished when RMS Titanic sank.

Let's look at the datasets again, now that we know that we're dealing with a maritime disaster. The "women and children" pattern is obvious for the two upper classes. And women are overall doing better than men, but again, economic status is crucial. To survive the RMS Titanic your best chance is to be one of the 6 rich children on board. Now with the knowledge of the provenance of our dataset the economic status groupings make more sense: "I" is for first class ticket holders, "II" is for second class ticket holders, and "III" is for third class. The crew is allocated as "Other" and as crew members could not bring their children on board, that explains the absence of any children in that group.

It is extremely powerful to be able to discover the story hidden in the noise of data. Small explorations, such as the one we just did can get us part of the way, but statistics and modern machine learning can take us much further. We can now find the consistent patterns in datasets with millions of entries, study the migration of populations through time, investigate ageing patterns in human society, peer into the human genome to work out genetic inheritance, or even find the right song recommendation for our latest playlist. Data surround us and modern statistics offer the tools for their exploration.

Versione in lingua originale a pag. 19

Come si trova l'epicentro di un'epidemia di colera? Come si fa a scoprire perché il tasso di mortalità in una clinica di maternità sia più alto di quello di una struttura analoga? Come si tenta di decifrare un messaggio segreto? Come si fa a decidere quali giocatori siano i più adatti per portare la squadra alla vittoria durante la prossima stagione del baseball?

La risposta a ciascuna di queste domande è: si analizzano i dati.

Siamo a Londra, anno 1854. È la fine di agosto e la città è teatro di un ennesimo focolaio di colera. La gente ha paura e i medici non hanno teorie concrete che aiutino a comprendere come si trasmette la malattia o come se ne possa arrestare la diffusione. Sullo sfondo di una parte della città povera e sovrappopolata, in un tempo di condizioni a dir poco antigieniche, ecco a voi il nostro protagonista, il medico John Snow, mentre si aggira interrogando gli abitanti alla ricerca di pattern di cui prendere nota. Grazie alla sua meticolosa raccolta dati, si rende conto di un fatto interessante: molti dei residenti toccati dall'epidemia si servono della pompa dell'acqua di Broad Street per l'approvvigionamento giornaliero. Snow va a prendere dell'acqua alla pompa incriminata e tenta di studiarla, ma dato che non sa bene cosa cercare le sue analisi rimangono prive di frutti. Tuttavia i dati raccolti, riportati su mappe della zona da lui stesso disegnate, lasciano pochi dubbi: la pompa dell'acqua di Broad Street deve avere qualcosa a che fare con l'epidemia. Le autorità londinesi, su indicazione di Snow, rimuovono il manico della pompa rendendola inutilizzabile, e il focolaio si spegne, o così si racconta. Il Dottor Snow è considerato oggi uno dei fondatori dell'epidemiologia moderna. E tutto cominciò con una raccolta dati.

Ma Snow non era l'unico a utilizzare questo approccio. Alcuni anni prima, nel 1846, un ospedale di Vienna assumeva un giovane medico ungherese di nome Ignaz Semmelweis. Semmelweis era preoccupato dalle voci che aveva sentito: l'ospedale aveva due reparti maternità, uno gestito da dottori e studenti di medicina, mentre l'altro impiegava esclusivamente ostetriche. I due reparti avevano tassi di mortalità da infezioni post-parto radicalmente diversi: in uno il tasso era del 2%, nell'altro si aggirava fra il 13% e il 18%. Una differenza sconcertante, che Semmelweis non aveva idea di come spiegare. Tanto più che, al contrario di quanto anche voi potreste pensare, il reparto con un alto tasso di mortalità era quello che impiegava i medici. L'eureka arrivò purtroppo in circostanze tragiche: nel marzo del 1847 un amico e collega di Semmelweis, il patologo Jakob Kolletschka, morì per un infezione causata da una ferita procuratasi col bisturi, e Semmelweis notò che l'amico si era procurato la ferita nell'effettuare un'autopsia su una donna deceduta di infezione post-parto. Fu allora che nella sua mente scattò un collegamento: qualunque cosa fosse che causava la morte delle pazienti poteva essere trasmessa al patologo che effettuava l'autopsia. Questa osservazione, combinata con la consapevolezza che quasi tutti i medici effettuavano autopsie, al contrario delle ostetriche, portava a un'inevitabile e semplice conclusione: qualcosa veniva trasmesso tramite le au-

topsie nel reparto maternità dei medici e provocava così il tasso di mortalità più alto. Semmelweis propose un intervento immediato: stabilire severi protocolli igienici – con lavaggio delle mani e disinfezione – per i medici dopo ogni autopsia. Era un provvedimento innovativo e radicale per i tempi. E funzionava: la mortalità delle pazienti subì un improvviso e consistente calo nel reparto dei medici. Semmelweis fu un apripista in fatto di pratiche igieniche in connessione al parto.

Adesso facciamo un salto in avanti verso l'epoca della Seconda Guerra Mondiale; come durante ogni guerra, l'informazione era una merce preziosa. Ci ritroviamo a Bletchley Park, il centro della crittoanalisi britannica. Non stiamo per concentrarci su Alan Turing, nonostante l'innegabile fascino della sua storia, ma su una giovane linguista. Mavis Batey aveva 19 anni e studiava tedesco al University College di Londra quando scoppiò la guerra. Le sue abilità linguistiche furono cruciali per lo sforzo bellico. Ruppe codice dopo codice e fu anche grazie al suo lavoro che fu possibile pianificare lo sbarco in Normandia. Cosa c'entra la crittoanalisi con in dati? Moltissimo. L'eccezionalità di Batey come crittoanalista è frutto delle sue abilità linguistiche, ma anche del suo talento nel riconoscere pattern e della sua familiarità con gli operatori nemici. Ad un certo punto dedusse che uno degli operatori aveva una fidanzata di nome "Rosa" e usò questa informazione per decodificare le sue trasmissioni. Era sempre attenta ai dati. Ecco un altro esempio: si accorse che uno dei messaggi che tentava di decifrare non conteneva nessuna lettera L. Ben sapendo che le macchine Enigma non codificavano mai una lettera con se stessa, immaginò che il messaggio fosse in realtà una sequenza di L. Grazie a questo fu in grado di determinare la configurazione delle macchine cifranti per quella giornata, portando un aiuto decisivo allo sforzo bellico alleato.

Circa sessant'anni dopo, dall'altra parte dell'Atlantico, la ricerca di pattern veniva impiegata in un contesto completamente diverso: il baseball. Nonostante lo studio delle statistiche sportive non fosse ovviamente nuovo, il giovane economista Paul DePodesta ne fece un uso tutto suo. Nel suo ruolo di assistente del Manager Generale della Oakland Athletics, DePodesta decise di seguire i dati. Concentrò la sua analisi sui parametri che sembravano davvero essere predittivi rispetto alle performance dei giocatori piuttosto che su quelli tradizionalmente utilizzati dai talent scout nell'ultimo secolo. Fu così che il Manager Generale — Billy Beane — poté utilizzare le limitate risorse a disposizione dell'Oakland A per mettere insieme una squadra veramente competitiva, selezionando giocatori con abilità complementari. Dopo il successo di numerose stagioni, la storia di DePodesta venne raccontata dal giornalista finanziario Michael Lewis, e nel frattempo ne è stato tratto addirittura un film.

Potrei riempire pagine e pagine di storie sulla raccolta e analisi dei dati, ma quello che invece voglio fare è mostrarvi quanto intuitivi e naturali possano essere questi processi. La statistica ci consente di riconoscere pattern anche quando si nascondono in una collezione di dati "rumorosi"; ci aiuta inoltre a evitare le trappole tese dai nostri "bias", che applichiamo inevitabilmente e inconsciamente a tutto ciò che ci viene messo di fronte.

La statistica, insomma, ci aiuta a far emergere le storie dietro i numeri e non è altro che una formalizzazione dei nostri istinti di riconoscimento di pattern.

Lasciate che vi mostri cosa voglio dire, questa volta mettendo voi nei panni di chi cerca di svelare la storia nascosta dietro i numeri. C'era una volta un gruppo di persone – poco più di 2000 – che si trovarono coinvolte in un avvenimento. Un avvenimento dalle conseguenze devastanti. Un avvenimento che avrebbe condotto alla morte di oltre il 65% di questo gruppo. Vi rivelo subito che questo avvenimento non fu il diffondersi di una malattia. Ma qualcosa accadde, e delle persone morirono. Per aiutarci a ricostruire che cosa, abbiamo dei dati. E la prima cosa da fare è questa: guardare i dati.

	By economic status and sex					
	Population Exposed to Risk			Number of Deaths		
Economic Status	Male	Female	Total	Male	Female	Total
I (high)	180	145	325	118	4	122
II	179	106	285	154	13	167
III (low)	510	196	706	422	106	528
Other	862	23	885	670	3	673
Total	1731	470	2201	1364	126	1490

Magari a prima vista ci ritroviamo un po' confusi, ma vediamo di usare un approccio sistematico. La tabella è divisa in due parti: la metà sinistra ci dice quante persone siano state coinvolte nell'avvenimento in questione, la parte di destra quante ne siano morte. La prima cosa che possiamo osservare è che il numero di morti è notevole. Questo avvenimento, qualunque esso sia, dev'essere stato terribile. Ma poi… magari state cominciando a notare qualcosa in più. Per esempio, non è strano che che la situazione appaia peggiore per gli uomini che per le donne? È vero che le donne all'interno del gruppo sono di meno fin dall'inizio, ma la cosa sembra comunque particolare. Diamo un'occhiata alle percentuali dei morti all'interno della nostra popolazione per farci un'idea più chiara.

	% of dead in each risk group		
Economic Status	Male	Female	Total
I (high)	65.56%	2.76%	37.54%
II	86.03%	12.26%	58.60%
III (low)	82.75%	54.08%	74.79%
Other	77.73%	13.04%	76.05%
Total	78.80%	26.81%	67.70%

La tabella mostra la percentuale di persone decedute in ciascuna categoria. Mentre quasi l'80% degli uomini finisce col morire, questo vale solo per circa il 27% delle donne: il nostro avvenimento, evidentemente, ha avuto un impatto diverso sui due sessi. In più, le tabelle ci danno informazioni su quello che è definito "Economic status" (diremo "ceto"), e che appare classificato da "I" (il livello più alto) a "III" (il più basso). Ma c'è qualcosa di imprevisto: una categoria denominata "Altro". È un fatto inaspettato, tanto più che non sembra trattarsi di dati mancanti: non è che semplicemente non conosciamo il "ceto" della categoria, ma che le persone al suo interno non appartengono a nessuno dei "ceti" della lista; per di più, la categoria contiene un numero non indifferente di persone. Delle 2201 persone nella nostra popolazione, 885 sono dichiarate "altro": circa il 40%.

Dunque, se foste uno statistico o un analista di dati, o semplicemente in quanto esploratore di dati, cosa fareste?

Quando i dati che abbiamo producono più domande che risposte, non resta che porre ancora più domande. In questo caso, per fortuna, abbiamo a disposizione un'ulteriore suddivisione abbastanza grezza dei nostri dati: invece che i dividere la popolazione in uomini e donne, possiamo dividerla in adulti e bambini.

	By economic status and age group					
	Population Exposed to Risk			Number of Deaths		
Economic Status	Adults	Children	Total	Adults	Children	Total
I (high)	319	6	325	122	0	122
II	261	24	285	167	0	167
III (low)	627	79	706	476	52	528
Other	885	0	885	673	0	673
Total	2092	109	2201	1438	52	1490

Questa nuova tabella dovrebbe immediatamente farci fare un passo indietro. La nostra popolazione è estremamente inusuale; non solo la percentuale di bambini – circa il 5% – è sorprendentemente bassa, ma è distribuita in modo inaspettato nei vari ceti. In particolare, il numero di bambini non è proporzionale al numero di appartenenti a ciascun ceto: se così fosse, dovrebbero esserci più bambini nella misteriosa categoria "altro". Inoltre, sembra che la morte sia toccata solamente ai bambini di "ceto" più basso.

Queste due collezioni di dati ci danno alcuni indizi molto utili: anzitutto si direbbe che la popolazione non sia naturale (altrimenti il numero di bambini seguirebbe pattern più usuali), e inoltre la probabilità di morte sembra essere più bassa se si è una donna o un bambino di ceto medio o alto.

Ecco qui l'essenza di questi dati: stiamo esplorando un qualche tipo di disastro le cui conseguenze hanno un impatto maggiore per gli uomini che per le donne e i bambini, e nell'ambito del quale il "ceto" influenza le probabilità di sopravvivenza. Potrete pensare per prima cosa a una guerra, ma già la presenza di queste *categorie "ceto" dovrebbe darvi dei sospetti. Se invece quello a cui state pensando è il detto "prima le donne e i bambini", siete sulla buona strada. Il codice di condotta marittimo, diffuso nel diciannovesimo e ventesimo secolo, prevede che in una situazione di pericolo le donne e i bambini abbiano accesso prioritario alle scialuppe di salvataggio. Questa regola entrò a far parte della coscienza popolare in occasione del disastro marittimo della nave RMS Titanic, che nel corso del proprio viaggio inaugurale entrò in collisione con un iceberg e affondò nelle acque gelate dell'Oceano Atlantico settentrionale. Quasi 1500 anime furono perdute assieme alla nave. Ad essere precisi, 1490 delle 2201 persone a bordo morirono nel naufragio del RMS Titanic.*

Ora che sappiamo che si tratta di un naufragio, guardiamo di nuovo i nostri dati. Il pattern "donne e bambini" è evidente nelle due classi superiori. In generale le donne si salvano più degli uomini, ma di nuovo il ceto è un aspetto cruciale. Per avere le migliori chances di sopravvivere al naufragio del Titanic, conviene essere uno dei sei bambini ricchi presenti sulla nave. Sapendo da dove provengano i dati, quelle strane categorie per "ceto" hanno finalmente più senso: "I" sta per i viaggiatori in prima classe, "II" per quelli in seconda, "III" per quelli in terza classe. L'equipaggio è classificato come "altro", il che spiega perché la categoria "altro" non contenga bambini.

Quello di saper scoprire le storie nascoste dal rumore nei dati è un potere notevole. Piccole esplorazioni come quella che abbiamo appena fatto possono farci fare un pezzo di strada, ma la statistica moderna e il machine learning ci conducono molto, molto oltre. Oggi possiamo trovare le regolarità in collezioni di dati con milioni di punti, studiare le migrazioni di popoli interi nel tempo, andare alla scoperta dei processi di invecchiamento nelle società della storia, svelare i segreti del genoma umano e dell'ereditarietà, perfino trovare il brano giusto da suggerire per la nostra ultima playlist. I dati sono ovunque attorno a noi e la statistica moderna ci fornisce gli strumenti adatti per la loro esplorazione.

Approssimazioni razionali e frazioni continue

di **Francesco Ballini**, dottorando presso l'Università di Oxford

In questo articolo cerchiamo di dare una risposta alle seguenti due domande:

1. Qual è il numero razionale più "semplice" compreso tra $\frac{109}{49}$ e $\frac{96}{43}$?
2. Quali sono i numeri razionali che approssimano "meglio" $\sqrt{2}$?

Diciamo che un numero è *razionale* se è esprimibile come frazione, cioè come rapporto fra due interi. Naturalmente bisognerebbe dare definizioni formali anche di "semplice" e di "meglio", cosa che però non faremo in questo articolo: ci limitiamo ad esplorare questi concetti tramite esempi e algoritmi di calcolo, sfruttando (e, speriamo, espandendo) l'idea intuitiva che ne ha il lettore.

1 Trovare numeri razionali "piccoli" in un intervallo

Cerchiamo il numero razionale più "semplice" fra $\frac{109}{49}$ e $\frac{96}{43}$. Dato che non sappiamo ancora chi è, chiamiamolo x. Abbiamo:

$$\frac{109}{49} < x < \frac{96}{43}$$

Osserviamo che $2 < \frac{109}{49} < \frac{96}{43} < 3$, pertanto ci sembra ragionevole sottrarre un 2 dall'equazione:

$$\frac{109}{49} - 2 < x - 2 < \frac{96}{43} - 2$$

$$\frac{11}{49} < x - 2 < \frac{10}{43}$$

Notiamo quindi che $0 < \frac{11}{49} < \frac{10}{43} < 1$; non sembra conveniente aggiungere o togliere qualche intero, ma possiamo considerare i reciproci di tutte le quantità in gioco, ovviamente invertendo i versi delle disuguaglianze:

$$\frac{49}{11} > \frac{1}{x-2} > \frac{43}{10}$$

A questo punto possiamo applicare di nuovo la nostra strategia precedente, osservando che $5 > \frac{49}{11} > \frac{43}{10} > 4$. Ma allora togliamo 4 dalla disuguaglianza di sopra, ottenendo:

$$\frac{49}{11} - 4 > \frac{1}{x-2} - 4 > \frac{43}{10} - 4$$
$$\frac{5}{11} > \frac{1}{x-2} - 4 > \frac{3}{10}$$

Abbiamo dunque $1 > \frac{5}{11} > \frac{3}{10} > 0$, quindi possiamo di nuovo considerare gli inversi, anche stavolta invertendo i versi delle disuguaglianze:

$$\frac{11}{5} < \frac{1}{\frac{1}{x-2} - 4} < \frac{10}{3}$$

A questo punto non abbiamo più $\frac{11}{5}$ e $\frac{10}{3}$ compresi tra due interi consecutivi; abbiamo invece $\frac{11}{5} < 3 < \frac{10}{3}$. Perciò, possiamo legittimamente sospettare che, se x è il numero razionale più "semplice" compreso tra $\frac{109}{49}$ e $\frac{96}{43}$, allora anche $\dfrac{1}{\frac{1}{x-2} - 4}$ sia il numero razionale più "semplice" tra $\frac{11}{5}$ e $\frac{10}{3}$; questo numero è dunque 3 (difatti $\frac{11}{5} = 2.2$ e $\frac{10}{3} = 3.33...$), perciò poniamo:

$$\frac{1}{\frac{1}{x-2} - 4} = 3$$

da cui

$$\frac{1}{x-2} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{13}{3}$$
$$x - 2 = \frac{3}{13}$$
$$x = \frac{29}{13}$$

Si può effettivamente verificare che $\frac{29}{13}$ sia il numero razionale più "semplice" tra $\frac{109}{49}$ e $\frac{96}{43}$: infatti

$$\frac{109}{49} = 2.22448979...$$
$$\frac{96}{43} = 2.23255813...$$

E, ad esempio, nessuna frazione il cui denominatore sia 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 o 12 può essere compresa tra 2.224 e 2.233.

Cerchiamo ora di vedere la nostra strategia sotto una diversa luce: per quanto riguarda le nostre quantità, abbiamo sottratto interi affinché risultassero comprese fra 0 e 1, per poi trovarne l'inverso e quindi ripetere la nostra strategia. Vediamo cosa succede applicando questo algoritmo singolarmente a $\frac{109}{49}$, senza x. Scriviamo:

$$\alpha = \frac{109}{49}$$

Poiché $2 < \frac{109}{49} < 3$, sottraiamo **2**:

$$\alpha - 2 = \frac{11}{49}$$

Invertiamo:

$$\frac{1}{\alpha - 2} = \frac{49}{11}$$

Poiché $4 < \frac{49}{11} < 5$, sottraiamo **4**:

$$\frac{1}{\alpha - 2} - 4 = \frac{5}{11}$$

Invertiamo:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\alpha-2}-4}=\frac{11}{5}$$

Poiché $2 < \frac{11}{5} < 3$, sottraiamo **2**:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\alpha-2}-4}-2=\frac{1}{5}$$

Invertiamo:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha-2}-4}-2}=5$$

Siamo dunque giunti ad un intero, **5**. Proviamo a ricalcolare α (che è $\frac{109}{49}$) preservando la struttura annidata della nostra frazione:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha-2}-4}-2}=5$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\alpha-2}-4}-2=\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\alpha-2}-4}=2+\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{\alpha-2}-4=\frac{1}{2+\dfrac{1}{5}}$$

$$\frac{1}{\alpha-2}=4+\frac{1}{2+\dfrac{1}{5}}$$

$$\alpha - 2 = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}}$$

$$\alpha = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}}$$

$$\frac{109}{49} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}}$$

Questa scrittura di $\frac{109}{49}$ prende il nome di *frazione continua*. Notiamo che la sequenza 2, 4, 2, 5 è esattamente la sequenza degli interi precedentemente scritti in grassetto, cioè gli interi che abbiamo sottratto per rendere la nostra quantità compresa tra 0 e 1 (e il 5 finale). Tale sequenza ha anche un'altra origine: proviamo a calcolare l'MCD tra 109 e 49 utilizzando l'algoritmo di Euclide. Eseguiamo la prima divisione con resto:

$$109 = \mathbf{2} \cdot 49 + 11$$

Da cui otteniamo 49 e 11. Abbiamo quindi:

$$49 = \mathbf{4} \cdot 11 + 5$$

Da cui 11 e 5, perciò:

$$11 = \mathbf{2} \cdot 5 + 1$$

E proseguiamo con un ulteriore passo con 5 e 1:

$$5 = \mathbf{5} \cdot 1 + 0$$

Otteniamo quindi la stessa sequenza $2, 4, 2, 5$.

Con analoghi conti possiamo calcolare la frazione continua di $\frac{96}{43}$:

$$\frac{96}{43} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}}}$$

E quella di $\frac{29}{13}$:

$$\frac{29}{13} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3}}$$

Anche in questi casi (e in generale per ogni numero razionale), i numeri che appaiono nella frazione continua sono gli stessi numeri ottenuti dall'algoritmo di Euclide.

La scrittura in frazione continua dà una spiegazione elegante del perché sia proprio $\frac{29}{13}$ il numero razionale più "semplice" compreso tra $\frac{109}{49}$ e $\frac{96}{43}$: a questi ultimi corrispondono le sequenze $2, 4, 2, 5$ e $2, 4, 3, 3$ rispettivamente. Affinché un numero razionale x sia compreso tra $\frac{109}{49}$ e $\frac{96}{43}$ la sua frazione continua deve necessariamente cominciare con $2, 4, 2$ o $2, 4, 3$ (Esercizio: perché?) e la frazione continua più semplice possibile è dunque data dalla sequenza $2, 4, 3$ (infatti la frazione continua che corrisponde a $2, 4, 2$ è minore di $\frac{109}{49}$).

2 Approssimare numeri reali con numeri razionali

Vogliamo ora capire in che modo sia possibile approssimare $\sqrt{2}$, che non è razionale (cioè esprimibile come rapporto fra numeri interi), con numeri razionali adeguatamente "semplici". Osserviamo subito che esistono approssimazioni buone a piacere: avendo

$$\sqrt{2} = 1.4142135...$$

possiamo pensare al numero razionale:

$$\frac{1414}{1000} = 1.414$$

Questo approssima $\sqrt{2}$ a meno di un errore di circa 0.0002. Tuttavia, $\frac{1414}{1000}$ non è una delle approssimazioni "migliori": esistono approssimazioni più fini con numeri razionali più "semplici".

Il nostro obiettivo è riciclare le osservazioni sulle frazioni continue fatte precedentemente. Prendiamo ad esempio $\frac{109}{49}$:

$$\frac{109}{49} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}}$$

Osserviamo che, troncando la sua frazione continua, otteniamo successive approssimazioni razionali di $\frac{109}{49}$:

$$2 = 2.000000...$$

$$2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2.250000...$$

$$2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}} = \frac{20}{9} = 2.222222...$$

$$2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}} = \frac{109}{49} = 2.224489...$$

Ovviamente $\frac{109}{49}$ è la "miglior" approssimazione razionale di se stesso, tuttavia, troncare la frazione continua ci fornisce approssimazioni meno fini ma più "semplici".

Vogliamo avere una frazione continua per $\sqrt{2}$. In che modo possiamo costruirla? Certamente l'algoritmo di Euclide non può andare bene; di cosa dovremmo calcolare l'MCD? Prima abbiamo visto un metodo non basato sul fatto che $\frac{109}{49}$ fosse razionale: togliere l'intero adeguato affinché la nostra quantità risulti compresa tra 0 e 1, calcolare l'inverso e ripetere l'algoritmo. I numeri della frazione continua sono quindi, in ordine, gli interi tolti.

Proviamo ad applicare questa strategia a $\sqrt{2}$. Abbiamo:

$$\sqrt{2}$$

Che è compreso tra 1 e 2. Togliamo quindi **1**, da cui:

$$\sqrt{2}-1$$

Invertiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1\,\Big(\text{poiché } (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}-\sqrt{2}-1=1\Big)$$

Pertanto abbiamo $\sqrt{2}+1$, che è compreso tra 2 e 3, da cui togliamo quindi **2**:

$$\sqrt{2}-1$$

Invertiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

Che è compreso tra 2 e 3, da cui togliamo quindi **2**:

$$\sqrt{2}-1$$

Invertiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

Che è compreso tra 2 e 3, da cui togliamo quindi **2** e così via...

Pertanto possiamo scrivere la nostra frazione continua di $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}}$$

Questa frazione continua non è nessun numero "vero": è solo un simbolo. Tuttavia, possiamo convincerci che essa sia davvero legata a $\sqrt{2}$.

Supponiamo che la scrittura di frazione continua corrisponda a un vero numero x:

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Osserviamo che:

$$x = \boxed{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \boxed{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}} = 1 + \frac{1}{1+x}$$

Poiché le due quantità incasellate in rettangoli (entrambe uguali a x) corrispondono alla stessa frazione continua. Abbiamo dunque:

$$x = 1 + \frac{1}{1+x}$$

$$x(1+x) = (1+x) + 1$$

$$x + x^2 = 2 + x$$

$$x^2 = 2$$

Da cui $x = \sqrt{2}$ (Esercizio metamatematico: e se fosse $-\sqrt{2}$?).

Ora che abbiamo la frazione continua di $\sqrt{2}$, possiamo troncarla per ottenere le "migliori" approssimazioni:

$$1$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{41}{29}$$

E andando avanti così abbiamo $\sqrt{2} = 1.4142135...$ approssimato da:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1.0000000...\\
\frac{3}{2} &= 1.5000000...\\
\frac{7}{5} &= 1.4000000...\\
\frac{17}{12} &= 1.4166666...\\
\frac{41}{29} &= 1.4137931...\\
\frac{99}{70} &= 1.4142857...\\
\frac{239}{169} &= 1.4142011...\\
\frac{577}{408} &= 1.4142156...
\end{aligned}
$$

Vediamo ad esempio che $\frac{99}{70}$ approssima $\sqrt{2}$ con un errore di circa 0.00007, quindi meglio di $\frac{1414}{1000}$. In generale, per ogni numero reale al posto di $\sqrt{2}$, troncare la frazione continua produce le approssimazioni "migliori".

Nel nostro caso speciale di $\sqrt{2}$, queste approssimazioni hanno innumerevoli proprietà aritmetiche e possono essere calcolate rapidamente. Supponiamo di avere una "buona" approssimazione razionale di $\sqrt{2}$:

$$\frac{a}{b} \sim \sqrt{2}$$

Questa dà immediatamente un'altra buona approssimazione, prendendone l'inverso:

$$\frac{b}{a} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ma:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi:

$$\frac{b}{a} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Perciò abbiamo un'altra approssimazione di $\sqrt{2}$:

$$\frac{2b}{a} \sim \sqrt{2}$$

In particolare, abbiamo che il prodotto delle due approssimazioni è proprio 2:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{2b}{a} = 2$$

Pertanto, abbiamo due approssimazioni di $\sqrt{2}$, una lievemente maggiore di esso e una lievemente minore. Possiamo quindi essere tentati di fare una media fra le due approssimazioni.

Prendiamo ad esempio l'approssimazione $\frac{1}{1}$ di $\sqrt{2}$. Possiamo costruire un'approssimazione migliore facendo la media:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2}$$

Proseguiamo applicando di nuovo questo metodo a $\frac{3}{2}$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$$

Procediamo con $\frac{17}{12}$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right)=\frac{577}{408}$$

Partendo dall'approssimazione (pessima, ma semplice) $\frac{1}{1}$, abbiamo trovato le migliori $\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}$, che apparivano già troncando la frazione continua di $\sqrt{2}$. Questo metodo di approssimazione si chiama *metodo babilonese*.

Si può osservare un'altra proprietà aritmetica di queste approssimazioni; torniamo alla nostra approssimazione $\frac{1}{1}$. Supponiamo di voler usare il metodo babilonese, ma ci siamo dimenticati come calcolare la media. Privi di idee, proviamo a sommare i numeratori e i denominatori delle frazioni[1]:

$$\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

Il primo passo è uguale. Proviamo con $\frac{3}{2}$:

$$\frac{3+4}{2+3}=\frac{7}{5}$$

Proseguiamo con $\frac{7}{5}$:

$$\frac{7+10}{5+7}=\frac{17}{12}$$

Andiamo avanti ancora:

$$\frac{17+24}{12+17}=\frac{41}{29}$$

Abbiamo $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}$, che sono precisamente le approssimazioni ottenute troncando la frazione continua. Ça va sans dire, procedendo su questa strada si ottengono precisamente le stesse approssimazioni date dalla frazione continua.

Esercizio. Qual è la frazione continua di $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (la famosa *sezione aurea*)? Che numeri si ottengono troncandola?

[1] Per i nostri lettori più affezionati potrebbe scattare una sensazione di déjà vu: questa particolare operazione è a lungo discussa nell'articolo "Frazioni e fogli quadrettati" del numero 9, che include anche un accenno alle frazioni continue!

Bibliografia

[1] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press.

[2] A. Khinchin, *Continued Fractions*, Dover Publications.

[3] C. Brezinski, *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer.

[4] D. Fowler, E. Robson, *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context*, Historia Mathematica, Volume 25, Issue 4.

[5] H. Davenport, *Aritmetica superiore*, Zanichelli.

Conway's Game of Life

di ***Francesca Rizzo***, *studentessa del Corso di Laurea Magistrale in Matematica dell'Università di Pisa*

Matematico per divertimento, così potremmo definire John Conway, uno degli scienziati geniali dei nostri tempi morto questo aprile a causa del Coronavirus. Nonostante durante la sua lunga carriera, prima a Cambridge e poi a Princeton, abbia trovato molti risultati in diversi campi della matematica, dichiarava di non aver mai lavorato nemmeno un giorno della sua vita: per lui la matematica era pura gioia. "Più di ogni cosa al mondo Conway amava giocare", pensare nuovi giochi, trovare soluzioni ingegnose e discuterle con altri matematici. Inventò tantissimi giochi, e sviluppò parte della teoria combinatoria dei giochi, ma quello per cui è diventato più famoso è *Game of Life*, il gioco della vita, riportato nel 1970 da Gardner sulla rubrica Giochi Matematici, della rivista Scientific American.

1 Regole del gioco

Game of Life è un gioco senza giocatori: la sua evoluzione è determinata a partire da una configurazione iniziale dalle regole del gioco. Il gioco si svolge su una griglia infinita in tutte le direzioni, detta *mondo*, le cui celle possono trovarsi in due stati, *vive* o *morte*. Ogni cella ha 8 celle vicine, ovvero le celle con cui condivide un lato o un angolo. Il gioco evolve a turni, detti *generazioni*: data la configurazione della griglia ad una generazione, questa individua in maniera univoca la configurazione della generazione successiva, secondo le seguenti regole:

- ogni cella viva che ha 2 o 3 celle vive fra i propri vicini rimane viva alla generazione successiva;
- ogni cella viva con meno di 2 celle vive fra i propri vicini muore per effetto di isolamento;

- ogni cella viva con più di 3 celle vive fra i propri vicini muore per effetto di sovrappopolazione;
- ogni cella morta con esattamente 3 celle vive fra i propri vicini diventa una cella viva, per effetto di riproduzione.

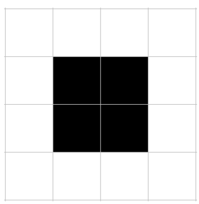
Il nostro ruolo nel gioco è quindi quello di scegliere particolare configurazioni iniziali, determinando quali celle sono vive e quali morte alla generazione 0, e osservare (o provare a capire) come si evolverà la vita in questo mondo.

2 Qualche configurazione

Per prendere un po' la mano con le regole del gioco iniziamo ad analizzare qualche configurazione e capire cosa succede. Disegneremo il mondo come una griglia $n \times n$, intendendo che tutte le altre celle non rappresentate sono morte, e indicheremo le celle vive colorandole di nero.

È facile vedere che, se nel mondo c'è un numero di celle vive minore o uguale a 2, alla generazione successiva non ci saranno più celle vive: nessuna cella viva ha fra le vicine abbastanza celle per sopravvivere, e nessuna cella morta ne ha abbastanza per nascere.

Consideriamo adesso una configurazione iniziale con 4 celle vive, disposte a quadrato. Osserviamo che questa configurazione rimane fissa al turno successivo: ogni cella morta ha al più 2 celle vive fra le vicine, e quindi non diventa viva alla generazione dopo, mentre ogni cella viva ha 3 celle vive vicine, e sopravvive alla generazione successiva.



Il blocco 2×2 è una configurazione *stabile*, che non cambia nel tempo. Esistono molti altri esempi di configurazioni stabili (anche apparentemente più complicati), e anche voi potete sbizzarrirvi e cercarne alcuni (vedi Figura 1).

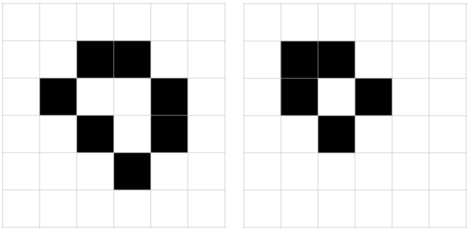
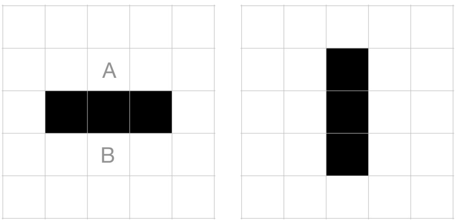
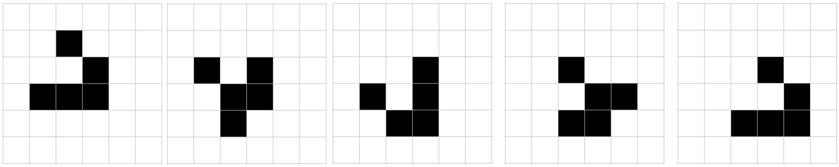


Figura 1: Due esempi di configurazioni stabili, immutate a ogni generazione.

Consideriamo adesso una configurazione iniziale con 3 celle vive consecutive disposte in orizzontale (quella raffigurata qui sotto): la cella nera centrale sopravvive al turno dopo, perché ha 2 celle vive vicine, le due celle nera esterne muoiono per effetto di isolamento e le due celle bianche indicate con A e B diventano nere per effetto di riproduzione, mentre tutte le altre rimangono bianche. La configurazione alla prima generazione è data quindi da 3 celle vive consecutive disposte in verticale, in cui la cella centrale coincide con la cella centrale della configurazione di partenza. Con un ragionamento analogo si mostra che alla generazione successiva la configurazione sarà proprio quella di partenza, ottenendo quindi un modello in cui si alternano queste due configurazioni: si parla di configurazioni *periodiche*.



Altre configurazioni particolari trovate sono le così dette *navicelle spaziali*, forme che si ripetono periodicamente spostandosi all'interno della griglia. Una di queste è l'*aliante*, una navicella che si muove in diagonale all'interno della griglia e che torna della forma iniziale ogni 4 generazioni.



SCAN ME

Inquadra il QR qui accanto con il cellulare per vedere l'aliante in movimento!

Ad oggi sono state trovate diverse navicelle spaziali, di forme differenti e che si muovono in direzioni diverse. Qui sotto trovate un altro esempio di navicella seguita da una serie di griglie vuote che potete usare per provare a scoprire che forme assume e verso dove sta viaggiando.

Ma purtroppo (anzi, per fortuna!) non tutte le configurazioni sono così facili da studiare e catalogare: proprio nelle sue prime ricerche Conway, che giocava a Life su lavagne o fogli di carta, scoprì l'R-pentomino, una configurazione formata solo da 5 celle, ma di cui non riusciva a determinare il comportamento.

La popolarità del gioco fu legata anche alla comparsa dei primi modelli di computer economici, che permisero di programmare piattaforme che simulavano il comportamento di *Life* e affidare a queste il lungo compito

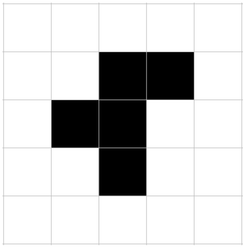


Figura 2: L'R-pentomino di Conway

di studiare le varie configurazioni: si scoprì che l'R-pentomino si stabilizzava dopo 1103 generazioni su una popolazione di 116 celle, di cui alcune in forme stabili ed altre in forme periodiche.

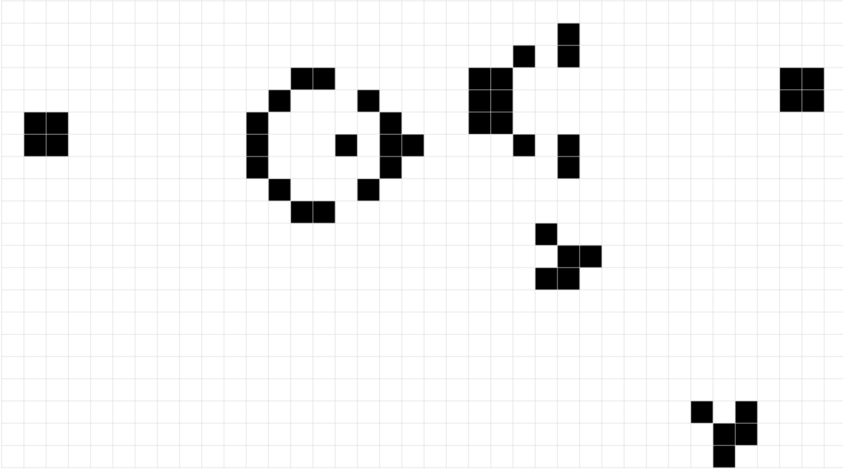
Oggi è disponibile per cellulare una app, Golly [3], con un simulatore di Life molto rapido: provare per credere che anche da poche celle vive si può generare un sistema tanto complesso.

3 Da Game of Life al computer

Inizialmente Conway aveva congetturato che ogni configurazione iniziale formata da un numero finito di celle vive non potesse avere crescita infinita, cioè che ad ogni generazione il numero di celle vive fosse limitato da una costante dipendente solo dalla configurazione iniziale, mettendo in palio 50 dollari per chi fosse riuscito a dimostrare o confutare questa congettura. Il premio fu vinto un mese dopo l'uscita della sfida da Gosper, che presentò la *glider gun* (pistola di alianti): questa spara un aliante dopo 15 generazioni, e continua a spararne altri ogni 30 generazioni, aumentando così la popolazione senza limiti.

Life ottenne così un grande successo: affascinati dal contrasto fra la semplicità delle regole e l'imprevedibilità dell'evolversi del gioco in molti si dedicarono allo studio delle varie configurazioni e all'interazione fra le forme note trovate.

Furono scoperte, catalogate e studiate molte configurazioni: sfruttando proprio delle glider gun e le proprietà degli scontri fra alianti fu possibile costruire le porte logiche NOT, AND, OR, cioè determinare particolari configurazioni con la proprietà di riconoscere e combinare logicamente la presenza di input (in questo caso dati da alianti) in particolari posizioni.



SCAN ME

Inquadra il QR e scopri la "pistola ad alianti" di Gosper in azione!

Questo significa che il gioco di Conway è Turing equivalente, cioè potente tanto quanto un computer con memoria infinita: in linea teorica e con tanta buona volontà sarebbe possibile trovare la configurazione giusta per ricreare qualsiasi algoritmo.

Nel 2006 ad esempio alcuni ricercatori sono riusciti a creare il *metapixel*, una configurazione che controlla tramite delle strutture al bordo una grandissima metacella composta da 64691 celle, per farla accendere e spegnere. Combinando tanti metapixel si ottiene una grande griglia formata dalla metacelle che si accendono e spengono secondo le regole del gioco Life sulla nuova piattaforma, ottenendo così da Life un programma per giocare a Life... come mostrato nel suggestivo video che puoi trovare al link `https://www.youtube.com/watch?v=xP5-iIeKXE8`.

Negli ultimi anni sono stati ricreati tantissimi programmi proprio usando solo una piattaforma che simula il gioco Life, ed addirittura è stata costruita una macchina di Turing: dopo 50 anni il gioco di Conway riesca ancora a stupire, appassionare e rivelare nuove configurazioni.

Bibliografia

[1] A. Zanni, *La pura gioia matematica di John Conway*, `https://www.iltascabile.com/scienze/john-conway/`.

[2] N. Carlini, *Digital Logic Gates on Conway's Game of Life*, `https://nicholas.carlini.com/writing/2020/digital-logic-game-of-life.html`.

[3] `http://golly.sourceforge.net`

I problemi del giornalino

una rubrica a cura di ***Davide Lombardo****,*
ricercatore presso il Dipartimento di Matematica di Pisa

Mandateci le vostre soluzioni all'indirizzo `LezioniAperteMatematica@gmail.com`

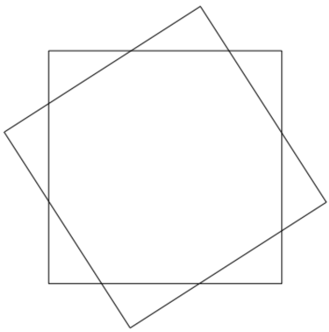
1 Divertissement

1.1 Dadi

Lanciamo 100 normali dadi a 6 facce (equilibrati) e sommiamo i risultati. Qual è la probabilità che la somma sia pari?

1.2 Due quadrati

Consideriamo due quadrati identici, entrambi di lato 1 e con il medesimo centro, come ad esempio quelli in figura.



Mostrare che (qualunque sia la posizione relativa di un quadrato rispetto all'altro) l'area dell'intersezione è strettamente maggiore di $\frac{3}{4}$.

1.3 Ancora quadrati

Ricordiamo che un numero intero si dice *quadrato perfetto* se la sua radice quadrata è a sua volta intera. Fissiamo una sequenza finita di cifre (per esempio 1793). Dimostrare che esiste sempre un quadrato perfetto la cui espressione decimale inizia con la sequenza di cifre assegnata (per esempio, $1793099025 = 42345^2$).

1.4 Polinomi di polinomi di polinomi...

Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi.

1. Siano a, b interi distinti. Dimostrare che $b - a$ divide $P(b) - P(a)$.
2. ($\star$) Sia t un intero tale che $P(P(P(P(\dots P(t)\dots)))) = t$ (il numero di applicazioni del polinomio non è noto). Dimostrare che allora $P(P(t)) = t$.

2 Qualche apertura verso la matematica non elementare

I primi due esercizi di questa sezione sono il punto di partenza di un'area della matematica nota come *geometria dei numeri*. Sorprendentemente, infatti, si tratta di strumenti sviluppati per studiare questioni aritmetiche! Qui ci limiteremo a darne un'interessante applicazione geometrica, ma garantiamo che questi risultati hanno trovato impieghi davvero imprevisti in varie aree della matematica.

1. ($\star$) Sia M un insieme nel piano (cartesiano) di area maggiore di 1. Dimostrare che M contiene due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tali che $x_1 - x_2$ e $y_1 - y_2$ siano interi.
2. (Teorema del corpo convesso di Minkowski) Sia M un insieme nel piano che rispetti le seguenti proprietà:
   a) M è simmetrico rispetto all'origine (ovvero per ogni punto (x, y) che stia in M anche il punto $(-x, -y)$ sta in M);
   b) M è convesso (ovvero, dati due punti m_1, m_2 in M, l'intero segmento che congiunge m_1 con m_2 è contenuto in M);
   c) M ha area strettamente maggiore di 4.

Dimostrare che allora c'è un punto (x, y) del piano, a coordinate intere e diverso da $(0, 0)$, contenuto in M.

Suggerimento. Applicare il punto precedente all'insieme "$\frac{1}{2}M$", ovvero l'insieme $\{(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) : (x, y) \in M\}$ (a parole: l'insieme M, riscalato di un fattore $\frac{1}{2}$ con centro l'origine).

3. Stiamo osservando la piantina di un giardino (essendo matematici, abbiamo disegnato un piano cartesiano sulla cartina). Nell'origine O del piano cartesiano si trova un gazebo. Inoltre, in ogni punto a coordinate intere (tranne l'origine) contenuto nel cerchio di centro O e raggio 50 è piantato un albero, che è semplicemente un cilindro di raggio r (quindi sulla piantina appare come un cerchio di raggio r). Dimostrare che se $r > \frac{1}{50}$ allora una persona seduta nel gazebo vede un albero in qualsiasi direzione guardi (matematicamente: ogni retta per l'origine interseca uno dei cerchi di raggio r che abbiamo tracciato).

Nota. Nella situazione del punto (3), si può verificare che se $r < \frac{1}{\sqrt{2501}} \approx \frac{1}{50.01}$, allora guardando in direzione del punto di coordinate $(50, 1)$ non si vede alcun albero. Il risultato di (3) è quindi estremamente raffinato!


MARIO LIVIO
LA SEZIONE AUREA
STORIA DI UN NUMERO E DI UN MISTERO CHE DURA DA TREMILA
Giorgio Tomaso Bagni
Storia della Matematica
GODFREY H. HARDY
APOLOGIA
MARCUS DU SAUTOY
L'ENIGMA DEI NUMERI PRIMI
L'ipotesi di Riemann, il più grande mistero della matematica
Richard Courant e Herbert Robbins
CHE COS'È LA MATEMATICA?

Alcuni consigli: libri, pagine web e altri media

Raccogliamo ora una breve lista di libri, pagine web e film che possono essere uno spunto per ulteriori approfondimenti. Alcuni contengono delle vere e proprie pagine di matematica, altri invece sono biografie di celebri matematici o trattano di argomenti "più leggeri".

- C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori.

- R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri: uno dei libri fondamentali di divulgazione matematica; lo consigliamo per approfondire e appassionarsi.

- M. du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, BUR: storia, problemi ed applicazioni sulla ricerca dei numeri primi con una notevole enfasi sull'ipotesi di Riemann.

- M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, BUR: un classico, da un grande autore dell'intrattenimento matematico.

- G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti: biografia di uno dei maggiori teorici dei numeri del secolo scorso, con uno spaccato della vita del famoso matematico indiano Ramanujan.

- O. A. Ivanov, *Facile come pi greco*, Bollati Boringhieri: problemi ed approfondimenti alla portata di chi ha una preparazione al livello della scuola superiore.

- M. Livio, *La sezione aurea*, BUR: Un percorso storico su uno dei numeri che ha maggiormente affascinato l'intelletto umano.

- G. Lolli, *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina Editore: Hilbert è stato protagonista di una straordinaria impresa intellettuale, che ha messo a nostra disposizione nuovi strumenti per indagare la realtà che ci circonda come la precisazione dei linguaggi, delle tecniche e dei problemi della logica matematica.

- A. Parlangeli, *Uno spirito puro: Ennio De Giorgi*, Milella: racconto della vita di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici italiani, a 20 anni dalla scomparsa, attraverso le testimonianze di chi ha avuto la fortuna di conoscerlo.

- S. Singh, *Codici e segreti. La storia affascinante dei messaggi cifrati dall'Antico Egitto a Internet*, BUR: dal Cifrario di Cesare ai moderni metodi di Crittografia, scopriamo come la matematica permetta di proteggere la nostra privacy.

- E. Sinibaldi, *IL FIBONACCI. Breve viaggio fra curiosità matematiche*, UMI: raccolta dei bellissimi poster a cura di Franco Conti, pieni di esercizi interessanti, a cui l'autore ha aggiunto le soluzioni.

- A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi: la biografia di André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso.

Per non confondere le idee ci siamo limitati a proporre una bibliografia essenziale. Di lettura in lettura sarete forse voi stessi ad aggiungere altri titoli e a scoprire altri libri a cui rimarrete affezionati.

Negli ultimi anni sono stati prodotti molti film a tema matematico. Eccone alcuni, dai classici alle perle poco note.

- D. Aronofsky, Π – *Il teorema del delirio*, 1998.

- M. Brown, *L'uomo che vide l'infinito*, 2015.

- R. Howard, *A beautiful mind*, 2001.

- M. Martone, *Morte di un matematico napoletano*, 1992.

- M. Tyldum, *The imitation game*, 2014.

- G. Van Sant, *Will Hunting – Genio ribelle*, 1997.

A proposito di video, di recente creazione è il canale YouTube del nostro dipartimento. Fateci visita (e, perché no, iscrivetevi!) all'indirizzo `https://www.youtube.com/channel/UCfMLkaFzJYx6JoMxtGvvqJw`; troverete presto una varietà di contenuti, fra cui anzitutto vi consigliamo il video dell'intervista ad Alessio Figalli, medaglia Fields per la Matematica, in occasione della Settimana Matematica 2019:

- `https://www.youtube.com/watch?v=i6ha2pLLUuA`

Per finire, ecco un breve elenco di siti web che vi consigliamo di visitare e dove potrete trovare informazioni, notizie ed esercizi utili:

- Sito di Maddmaths! Matematica, Divulgazione, Didattica:
  `http://maddmaths.simai.eu/`
- Versione on-line del giornalino:
  `https://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/il-giornalino-degli-open-days`
- Sito del Dipartimento di Matematica di Pisa:
  `http://www.dm.unipi.it/webnew/`
- Sito delle olimpiadi di matematica:
  `http://olimpiadi.dm.unibo.it/`
- Sito della Scuola Normale Superiore di Pisa:
  `http://www.sns.it/`
- Sito degli studenti di matematica di Pisa:
  `https://poisson.phc.dm.unipi.it/`

Per ogni ulteriore informazione, come pure per scaricare la versione elettronica di questo giornalino e dei numeri precedenti, vi invitiamo a visitare il sito:

`http://www.dm.unipi.it/webnew/it/orientamento/home-orientamento`